微分形式による解析力学

改訂増補版

木村利栄
菅野礼司 著

吉岡書店

はじめに

重力を含む素粒子の統一理論として，超弦理論の研究が最近の素粒子論の流行の主流になっている．超弦理論は，従来の場の理論に現れた発散の困難を回避できる可能性をもち，従来のゲージ場も含んだ統一理論である．ゲージ場や超弦理論の定式化に用いられる道具は，束縛条件をもった拘束系の力学である．したがって，素粒子の世界を記述する基礎となるのが拘束系の力学であるといえよう．拘束系の力学の問題は，もともと古典的な解析力学においても存在していた．戦後間もなく，Bergmann と Dirac により独立に，拘束系の力学の新しい理論的定式化が行われた．彼らのはじめの主な狙いは重力場の量子化にあった．現在，Dirac による手法が，ゲージ理論との関連で広く用いられている．本書は，従来の解析力学の延長として，Dirac らによる拘束系の力学をとらえるように，解析力学を微分形式の方法で一貫して記述したものである．

ここで，なぜ微分形式によって記述したかについて触れなければならない．そのために解析力学の発展した歴史を振り返ってみよう．17 世紀にニュートン力学が形成される以前は，幾何学的図形を用いて力学が記述されていた．Newton，Leibniz によって微積分学が導入され，微積分学による力学の定式化がなされた．さらに Lagrange により，一般的な公式から，力学問題の解決に必要なすべての方程式が与えられるような体系にまとめられた．これにより，幾何学的な図形に頼ることなく，解析的な方法によって整備された力学の理論となった．これにとどまらず，一般座標の導入や，変換論を用いた展開により，抽象化が進められ，古典論の枠を越えた普遍的なひとつの理論形式となった．このことは逆に座標系によらない力学の性質の探究が要求され，解析力学も座標によらない形式で記述されることが望まれるようになった．実際に，座標によらない形で理論形式が書かれていると，現実の力学問題を解く場合，それに都合のよい座標系をとって解けばよいことになる．この目的にかなっているのが微分形式による解析力学の記述であり，新しい意味での幾何学への回帰である．

解析力学に関する著書は，国内・国外において数多くあり，名著と呼ばれるもの

も少なくない．微分形式による記述は巻末の参考文献にあるように外国語で書かれたものは存在しているが，日本語で一貫して書かれたものは見当たらない．これが，浅学のわれわれにあえて，拘束系の力学まで含めて，解析力学を微分形式によって一貫した形にまとめる試みを行う動機になった．

本書では，微分形式等の予備知識等は必要としないように，この本の中で解説し，他の書物に頼らずに読めるように努めたつもりである．そのため，数学的な厳密さに欠けた点もあるかもしれないが，式の導出等はできるだけ詳しく書き，余分な計算をあまり必要としないで，このままでわかるようにした．第2章以下，余計と思われるほど例題をあげて，理解の助けとして，実際問題に当たられるように心がけた．弦理論や重力理論への応用は割愛したが，これらの新しい理論への勉強を始める人の一助になれば幸いである．

終わりに，種々お世話をいただいた編集部の藤村行俊さんに厚く感謝します．

1988年5月

著者しるす

「微分形式による解析力学」の改訂増補版にあたって

本書は最初「マグロウヒル出版株式会社」より1988年に出版された．その内容は，解析力学を初歩から拘束系まで微分形式により一貫した形式で纏めたもので，おそらくそれまでに他に類書がないと思う．そのために，これを上梓してから第3刷まで出た．しかし，残念ながらマグロウヒル出版株式会社の和書出版部が閉鎖され絶版となった．

ところがこの度，吉岡書店のご厚意により，再版することになった．この機会に不備な点を補い誤植を改めるだけでなく，その後の拘束力学系の理論の発展を取り入れて，改訂増補することにした．特に，ゲージ理論を含む拘束系の力学理論については古典力学の範囲でかなり加筆し，第9章では新たな知見を入れて大幅に書き変えた．さらに，最近，重力理論や弦理論などで試みられ，今後利用されるであろう高階微分の変数を含むLagrange関数の力学系の扱いを拘束系まで含めて，付録として追加した．

本書の絶版を惜しんで再版の企画から出版まで種々ご苦労くださった吉岡書店社長吉岡誠氏と編集部の上川正二氏にこの場を借りて感謝の意を表します．

1996年9月

著　　者

目　　次

第1章　外 微 分 形 式

この章では，本書で用いる微分形式と外微分形式の概略を，紹介を兼ねて説明する．はじめて外微分形式を学ぶ人のためのもので，外微分形式に詳しい人はこの章は飛ばされたい．本書において外微分形式を用いる理由は，この形式が，座標系によらないで定義されることに由来する．したがって，この形式を用いれば解析力学をまとまったひとつの美しい理論形式に書くことができる．

§ 1-1 で微分形式，外積，外微分を導入し，§ 1-2 で，外積，外微分の一般的な定義をし，それらの性質を述べる．§ 1-3 で 1-形式に双対なベクトル場を導入する．このベクトル場は以下の力学系の理論の展開で最も基本となる道具である．ベクトル場のリー微分もここで導入される．§ 1-2，§ 1-3 の内容のみでも第 2 章以下の話は読める．§ 1-4 で，微分方程式系の積分可能条件を外微分の言葉で表す．完全積分可能な微分方程式系についての Frobenius の定理を述べ，その証明を与える．この定理は，以下においてしばしば用いられる重要なものである．

§ 1-1　外積および微分形式の導入

粒子が位置 (x, y, z) から $(x+dx, y+dy, z+dz)$ へ力 $\boldsymbol{F}=(F_x, F_y, F_z)$ のもとで動いたとき，力 $\boldsymbol{F}$ のなす仕事は

$$F_x(x, y, z)dx+F_y(x, y, z)dy+F_z(x, y, z)dz \tag{1-1-1}$$

で与えられる．この式のように微分 dx, dy, dz の線形結合で書かれる量を 1-形式，あるいは Pfaff 形式 (Pfaffian form) と呼ぶ．

粒子が空間内の閉曲線 C に沿って 1 周したとき，力 $\boldsymbol{F}$ のなした仕事 W は

$$W=\oint_C (F_x dx+F_y dy+F_z dz)$$

である．Stokes の定理を用いて，C を境界とする閉曲面 S 上の面積分で表すと

$$W=\int_S\left\{\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)dxdy\right\}$$

となる．右辺の積分記号を除いた部分を次のように書く．

$$\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)dy\wedge dz+\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)dz\wedge dx+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)dx\wedge dy \tag{1-1-2}$$

ここで記号 $\wedge$ は，dx, dy, dz の間に定義される一種の積で外積と呼ばれる．(1-1-2) から，たとえば第1項の $(\partial F_z/\partial y-\partial F_y/\partial z)$ は，y, z について反対称なので $dy\wedge dz$ も反対称である．したがって，外積は次の反対称の性質をもつ．

$$\begin{aligned}&dx\wedge dy=-dy\wedge dx,\quad dy\wedge dz=-dz\wedge dy,\quad dz\wedge dx=-dx\wedge dz,\\&dx\wedge dx=dy\wedge dy=dz\wedge dz=0.\end{aligned} \tag{1-1-3}$$

上式以外は通常の計算法に従うものとする．たとえば

$$\begin{aligned}(e\,dx+f\,dy)\wedge(g\,dy+h\,dz)&=e\,dx\wedge(g\,dy+h\,dz)+f\,dy\wedge(g\,dy+h\,dz)\\&=eg\,dx\wedge dy-eh\,dz\wedge dx+fh\,dy\wedge dz\end{aligned}$$

ただし，e, f, g, h は x, y, z の関数である．

外積 $\wedge$ を用いると，(1-1-1), (1-1-2)に対応するものとして，次のような量

$$G_{yz}(x, y, z)dy\wedge dz+G_{zx}(x, y, z)dz\wedge dx+G_{xy}(x, y, z)dx\wedge dy \tag{1-1-4}$$

がつくれる．微分が2つあるという意味で，2-形式と呼ぶ．

3次元空間内の領域 V をとり，その表面を S とする．Gauss の定理から

$$\int_S(G_{yz}dydz+G_{zx}dzdx+G_{xy}dxdy)=\int_V\left(\frac{\partial G_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial G_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial G_{xy}}{\partial z}\right)dxdydz$$

を得る．(1-1-2) と同様に，右辺の積分記号を除いた部分を，次のように書く．

$$\left(\frac{\partial G_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial G_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial G_{xy}}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz \tag{1-1-5}$$

これは3つの微分の積なので，3-形式と呼ばれる．3つの微分の積に意味をもたせるために，次の結合則を要請する．

$$dx\wedge(dy\wedge dz)=(dx\wedge dy)\wedge dz \tag{1-1-3$'$}$$

したがって，上式で括弧を取って $dx\wedge dy\wedge dz$ と書かれる．一般に3-形式は

$$H_{xyz}dx\wedge dy\wedge dz \tag{1-1-6}$$

で与えられる．3次元空間では，外積の反対称性から4-形式（たとえば，$dx\wedge dy\wedge dz\wedge dx$）は0である．

これまでに導入した1-形式，2-形式，3-形式等を総称して微分形式と呼ぶ．ここで1-形式(1-1-1)と2-形式(1-1-2)の間の関係を調べよう．

(1-1-2)は外積の性質を用いると次のように書くことができる．

$$\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)dy\wedge dz+\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)dz\wedge dx+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)dx\wedge dy$$

$$=\left(\frac{\partial F_x}{\partial y}dy+\frac{\partial F_x}{\partial z}dz\right)\wedge dx+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}dx+\frac{\partial F_y}{\partial z}dz\right)\wedge dy$$

$$+\left(\frac{\partial F_z}{\partial x}dx+\frac{\partial F_z}{\partial y}dy\right)\wedge dz$$

$$=dF_x\wedge dx+dF_y\wedge dy+dF_z\wedge dz$$

ただし，$dF_x=(\partial F_x/\partial x)dx+(\partial F_x/\partial y)dy+(\partial F_x/\partial z)dz$ 等である．上式は dF_x 等を1-形式と解釈して書き直したものである．このように，1-形式

$$\omega=F_xdx+F_ydy+F_zdz$$

から，$d^2x=0$ 等を用いて 2-形式

$$d\omega=dF_x\wedge dx+dF_y\wedge dy+dF_z\wedge dz \tag{1-1-7}$$

を導く操作を外微分という．同様に，2-形式(1-1-4)を ρ とすると，3-形式(1-1-5)は外微分を用いて $d\rho$ と書ける．

終わりに，微分形式の積分について触れる．われわれは，$f(x,y)dx\wedge dy$ と面積分 $\iint_S f(x,y)dxdy$ とを対応させて考えた．$dx\wedge dy=-dy\wedge dx$ から $\iint_S f(x,y)dx\,dy=-\iint_S f(x,y)dydx$ となるが，積分順序の変更という面から考えると

$$\iint_S f(x,y)dxdy=\int\left(\int f(x,y)dy\right)dx=\int\left(\int f(x,y)dx\right)dy=\iint_S f(x,y)dydx$$

であるので矛盾と思える．しかし，$f(x,y)dx\wedge dy$ から面積分へ移る際に，変数 x，y の順序をはじめから定めておくべきで，換言すると面の向きを指定しておくべきである．積分の形にしてしまってからの積分順序の変更とは無関係に，$dx\wedge dy$ と書かれていても，x,y の順序が逆なら $-dy\wedge dx$ と考えるべきで，$f(x,y)dx\wedge dy$ に対して，$-\iint_S f(x,y)dydx$ とする．もとになる式 $f(x,y)dx\wedge dy$ は同じでも，xy 面の向きの方向が逆なら積分の値の符号も逆になり矛盾はない．

ベクトル解析でのStokesの定理とGaussの定理は，微分形式の積分を用いて，

ともに次の形に書ける．

$$\int_{\partial\Sigma}\omega=\int_{\Sigma}d\omega \tag{1-1-8}$$

ここで，Σ は3次元空間のある領域で，$\partial\Sigma$ は Σ の境界である．Stokesの定理では，Σ は面 S，$\partial\Sigma$ は閉曲線 C で ω は1-形式(1-1-1)である．Gaussの定理では Σ は3次元の領域 V，$\partial\Sigma$ は V の境界の曲面 S で ω は2-形式(1-1-4)である．

§1-2　微分形式と外微分の一般性質

前節で導入した微分形式と外微分の性質を詳しく調べよう．本書では多粒子系の力学を考えるので，3次元空間のみならず，多次元空間内で扱わねばならない．次元の数を n とし，この n 次元空間の座標を $x^i\ (i=1,2,\cdots,n)$ とする．

まず n 次元空間内の一点Pでの微分形式を定義する．点Pでの座標 x^i の微分 dx^i を $(dx^i)_{\mathrm{P}}$ と書く．添字Pを付したのは，dx^i が局所的な量であり，点Pを指定して定まるということを示すためである．$(dx^i)_{\mathrm{P}}$ を基底とするベクトル空間 $T_{\mathrm{P}}{}^*$ を考える．すなわち $\omega\in T_{\mathrm{P}}{}^*$ は一意的に次のように書けるものとする．

$$\omega=\sum_{i=1}^{n}a_i(dx^i)_{\mathrm{P}}\qquad(a_i\text{ は定数}) \tag{1-2-1}$$

以後，しばしば現れる $\sum_{i=1}^{n}$ の記号は略して

$$\omega=a_i(dx^i)_{\mathrm{P}}$$

と書く．1つの項の中で上つきの添字と下つきの添字が現れた場合は，1から n までの和をとるものと約束する．$T_{\mathrm{P}}{}^*$ の元，$\rho=a_i(dx^i)_{\mathrm{P}}$；$\omega=b_i(dx^i)_{\mathrm{P}}$ について加算とスカラー倍を次のように定義する．

$$\alpha\rho+\beta\omega=(\alpha a_i+\beta b_i)(dx^i)_{\mathrm{P}}\qquad(\alpha,\beta\text{ は定数}) \tag{1-2-2}$$

これにより $T_{\mathrm{P}}{}^*$ はベクトル空間としての性質をもつ．$T_{\mathrm{P}}{}^*$ の元をPにおける1-形式と呼ぶ．

点Pにおける1-形式の間の外積 $\wedge$ は(1-1-3)，(1-1-3′)の性質や(1-1-3)のところで述べた通常の演算規則を満たさねばならない．よって，$(dx^i)_{\mathrm{P}}$ と $(dx^j)_{\mathrm{P}}$ との外積は

I）$(dx^i)_{\mathrm{P}}\wedge(dx^j)_{\mathrm{P}}=-(dx^j)_{\mathrm{P}}\wedge(dx^i)_{\mathrm{P}}\qquad(i\neq j)$

　　$(dx^i)_{\mathrm{P}}\wedge(dx^i)_{\mathrm{P}}=0\qquad(i\text{ については和はとらない})$

II）$(dx^i)_{\mathrm{P}}\wedge(dx^j)_{\mathrm{P}}\wedge(dx^k)_{\mathrm{P}}=((dx^i)_{\mathrm{P}}\wedge(dx^j)_{\mathrm{P}})\wedge(dx^k)_{\mathrm{P}}$

Ⅲ）　$\alpha(dx^i)_P\wedge(dx^j)_P=(\alpha(dx^i)_P)\wedge(dx^j)_P=(dx^i)_P\wedge(\alpha(dx^j)_P)$

Ⅳ）　$\{\alpha(dx^i)_P+\beta(dx^j)_P\}\wedge(dx^k)_P=\alpha(dx^i)_P\wedge(dx^k)_P+\beta(dx^j)_P\wedge(dx^k)_P$

と定義する．ここで α,β は定数である．この外積 $\wedge$ を用いて，$\rho=a_i(dx^i)_P$，$\omega=b_i(dx^i)_P$ に対し，Ⅲ)，Ⅳ）から

$$\rho\wedge\omega=a_ib_j(dx^i)_P\wedge(dx^j)_P=\frac{1}{2}(a_ib_j-a_jb_i)(dx^i)_P\wedge(dx^j)_P \qquad (1\text{-}2\text{-}3)$$

となる．

$(dx^i)_P\wedge(dx^j)_P$ $(1\leq i\leq j\leq n)$ を基底とするベクトル空間を $\overset{2}{\wedge}T_P^*$，または Ω_P^2 と書く．$\overset{2}{\wedge}T_P^*$ の元をPにおける2-形式という．以下同様にして $\overset{k}{\wedge}T_P^*$ が定義され，$\overset{k}{\wedge}T_P^*$ の元をPにおける k-形式と呼ぶ．$\overset{k}{\wedge}T_P^*$ は $(dx^{i_1})_P\wedge\cdots\wedge(dx^{i_k})_P$ $(1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n)$ を基底とするベクトル空間である．$k\geq n+1$ に対しては，外積の反可換性から外積は0なので，$\overset{k}{\wedge}T_P^*=\phi$（$\phi$：空集合）である．

ω,ρ をそれぞれ k-形式，l-形式とする．すなわち

$$\begin{aligned}\omega&=\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}a_{i_1\cdots i_k}(dx^{i_1})_P\wedge\cdots\wedge(dx^{i_k})_P\\ \rho&=\sum_{1\leq j_1<\cdots<j_l\leq n}b_{j_1\cdots j_l}(dx^{j_1})_P\wedge\cdots\wedge(dx^{j_l})_P\end{aligned} \qquad (1\text{-}2\text{-}4)$$

に対して，ω と ρ の外積 $\omega\wedge\rho$ を次式で定義する．

$$\omega\wedge\rho=\sum_{\substack{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n\\1\leq j_1<\cdots<j_l\leq n}}a_{i_1\cdots i_k}\cdot b_{j_1\cdots j_l}(dx^{i_1})_P\wedge\cdots\wedge(dx^{j_l})_P \qquad (1\text{-}2\text{-}5)$$

よって $\omega\wedge\rho$ は $(k+l)$-形式である．

ここで $\overset{k}{\wedge}T_P^*$ $(k=0,1,\cdots,n)$ の直和によるベクトル空間 $\wedge T_P^*$ を考える．ただし，$\overset{0}{\wedge}T_P^*=\boldsymbol{R}$（$\boldsymbol{R}$：実数全体）で $\overset{1}{\wedge}T_P^*=T_P^*$ である．

$$\wedge T_P^*=\overset{0}{\wedge}T_P^*\oplus\overset{1}{\wedge}T_P^*\oplus\cdots\oplus\overset{n}{\wedge}T_P^*$$

$\wedge T_P^*$ の元に対しては，ベクトル空間としての和，スカラー倍の他に，結合則が満たされている外積 $\wedge$ による一種の掛算が定義されている．$\wedge T_P^*$ の元を点Pにおける微分形式と呼ぶ．この $\wedge T_P^*$ を T_P^* の外積代数，またはGrassmann代数と呼んでいる．

これまでは，一点Pにおける微分形式を考えてきた．よって，k-形式(1-2-4)の $a_{i_1\cdots i_k}$ は定数であった．前節で3次元空間に導入した a_i は x,y,z の関数であった．これに対応して，Uを n 次元空間の中の領域とし，U上での微分形式を導入しよう．

Uの各点で，その点における k-形式を1つ選び，これが U 上にわたってなめらかに行われた場合に，これらの k-形式を U 上の k-形式と呼ぶ．したがって，U 上の k-形式 ω は，U上でなめらかな x^i の関数 $a_{i_1\cdots i_k}(x)$ を用い

$$\omega=\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} a_{i_1\cdots i_k}(x)dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k} \tag{1-2-6}$$

と表される．この式は次のようにも書ける．

$$\omega=\frac{1}{k!}a_{i_1\cdots i_k}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k} \tag{1-2-7}$$

ここで $a_{i_1\cdots i_k}$ はどの2つの添字を入れ替えても，絶対値が同じで符号が逆である．点Pでの ω の値 $\omega(\mathrm{P})$ は次のように与えられる．

$$\omega(\mathrm{P})=\frac{1}{k!}a_{i_1\cdots i_k}(\mathrm{P})(dx^{i_1})_{\mathrm{P}}\wedge\cdots\wedge(dx^{i_k})_{\mathrm{P}}$$

Uの各点で Grassmann 代数が適用できるので，上で導入した U上の微分形式についても Grassmann 代数が適用できる．U上の k-形式 ω と l-形式 ρ に対して $\omega\wedge\rho$ は $(k+l)$-形式となる．U 上の k-形式の全体を $\overset{k}{\wedge}T^*(U)$ または $\Omega^k(U)$ と書く[*]．$\overset{0}{\wedge}T^*(U)=\Omega^0(U)$ は U 上で定義されたなめらかな微分可能な関数の全体である．微分形式が導かれたので U 上での外微分を考えよう．

前節で述べた外微分の概略を参考にして，写像を用いて外微分 d を代数的に定義する．一般的な定義として次のことを証明しよう．

次のI)～IV)までの性質をもつ $\Omega^k(U)$ から $\Omega^{k+1}(U)$ への写像 d が存在して一意的である．

I) $\rho,\omega\in\Omega^k(U)$ に対し $d(\rho+\omega)=d\rho+d\omega$．

II) $d(\lambda\wedge\mu)=d\lambda\wedge\mu+(-1)^{\deg\lambda}\lambda\wedge d\mu$ （$\deg\lambda$ は λ の次数）

III) 各微分形式に対し $d\cdot d=0$

IV) なめらかな関数 $f\in\Omega^0(U)$ に対して $df=\dfrac{\partial f}{\partial x^i}dx^i$

この写像 d を外微分という．IV)の f として x^i をとると，dx^i も関数に外微分 d を作用させた結果と見なされ，III)により $d(dx)=0$ となる．

まず d の存在から証明する．(1-2-7) の k-形式に対し外微分 $d\omega$ を

---

*) $\overset{1}{\wedge}T^*(U)$ は Uの余接バンドルと呼ばれている．

$$d\omega=\frac{1}{k!}\frac{\partial a_{i_1\cdots i_k}}{\partial x^j}dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k} \tag{1-2-8}$$

と定義し*)，これが上のＩ)～Ⅳ)を満たすことを確かめることによってdの存在を示す．Ｉ)とⅣ)は明らかなのでII)，Ⅲ)を調べる．Ｉ)の性質から，λ, μとして１つの項のみからつくられている場合について調べれば十分である．

$$\lambda=a\,dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}\ ;\ \mu=b\,dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_l} \tag{1-2-9}$$

とおくと

$$\lambda\wedge\mu=(ab)dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}\wedge dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_l} \tag{1-2-10}$$

であるから

$$\begin{aligned}
d(\lambda\wedge\mu)&=\left(\frac{\partial a}{\partial x^m}b+a\frac{\partial b}{\partial x^m}\right)dx^m\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_l}\\
&=\left(\frac{\partial a}{\partial x^m}dx^m\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}\right)\wedge(b\,dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_l})\\
&\quad+(-1)^k(a\,dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k})\wedge\left(\frac{\partial b}{\partial x^m}dx^m\wedge dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_l}\right)\\
&=d\lambda\wedge\mu+(-1)^k\lambda\wedge d\mu
\end{aligned}$$

となりII)が成り立つ．上で$dx^m\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}=(-1)^k dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}\wedge dx^m$を用いた．Ⅲ)を示すため(1-2-7)，(1-2-8)およびⅣ)を用いて

$$dd\omega=\frac{1}{k!}\frac{\partial^2 a_{i_1\cdots i_k}}{\partial x^m\partial x^n}dx^m\wedge dx^n\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$$

$dx^m\wedge dx^n$はm, nについて反対称で，$\partial^2 a\ldots/\partial x^m\partial x^n$は対称なので，$m, n$について和をとれば０となり，$dd\omega=0$が導かれてⅢ)が示される．Ⅲ)は，後に示すように，偏微分方程式の積分可能条件式と密接に関係する．

一意性を示すために，Ｉ)～Ⅳ)を満たす別のd'があったとする．Ⅳ)から$f\in\Omega^0(U)$に対して$d'f=df$，これとⅢ)から$d'dx^i=d'd'x^i=0$，よってII)から$d'(a\,dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k})=d'a\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}=da\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}=d(a\,dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k})$，よって$d=d'$となり一意性が示される．

力学の問題を扱うとき，座標系を固定せずに，その問題に便利な座標系に変換す

---

*）これは次のようにも書ける．

$$d\omega=\sum_{i_1<\cdots<i_k}(-1)^{l-1}\frac{\partial a_{i_1\cdots\hat{i_l}\cdots i_{k+1}}}{\partial x^{i_l}}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_l}\wedge\cdots\wedge dx^{i_{k+1}}$$

$\hat{i_l}$は，i_lは落とすことを意味する．

ることが多い．したがって，これまでに定義した微分形式や外微分が，座標変換でどう変わるかということを調べるのは重要なことである．

ここで，座標変換の概念をもっと一般化して，次のような写像を考える．Uをn次元空間内の領域，Vをm次元空間内の領域とする．Uの座標系を$x^1, \cdots, x^n$, Vの座標系を$y^1, \cdots, y^m$とする．UからVへのなめらかな写像をϕとする．すなわち，$\phi: U \to V$．座標x^iをもつUの点から，座標y^iのVの点への写像がϕにより

$$y^j = \phi^j(x^1, \cdots, x^n), \quad j = 1, \cdots, m \tag{1-2-14}$$

と書かれる．$m = n$の場合が通常の座標変換に対応している．V上の実数値関数をgとし，$g \circ \phi(x) \equiv g(\phi(x))$によって$U$上の実数値関数が得られる．これを改めて$\phi^* g$と書く．

$$(\phi^* g)(x) = (g \circ \phi)(x) = g(\phi(x))$$

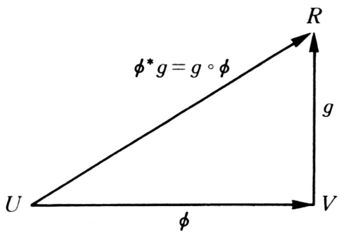


図 1-1

このϕ^*によって，逆に$\Omega^0(V)$から$\Omega^0(U)$への写像

$$\phi^* : \Omega^0(V) \to \Omega^0(U)$$

が定義される．ϕ^*をϕによって引き起こされた写像（あるいは引き戻された）という．座標x^i, y^jをそれぞれU, V上で定義された関数と見ると，(1-2-14)は$\phi^* y^j = \phi^j(x)$と書ける．

微分形式に対してϕ^*の定義を拡張しよう．そのために，dy^jを$dy^j = (\partial y^j / \partial x^i) dx^i$で置き換えることによって$U$上の1-形式に対応させる．したがって，$\phi^* dy^j$を

$$\phi^* dy^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} dx^i \tag{1-2-15}$$

で定義する．これを，線形性を保つように，一般の1-形式に拡張する．$\Omega^1(V)$の元$\omega = a_j(y) dy^j$に対し，$\phi^* \omega \in \Omega^1(U)$を

$$\phi^*\omega = a_j(y(x))\phi^* dy^j = a_j(y(x))\frac{\partial y^j}{\partial x^i}dx^i \qquad (1\text{-}2\text{-}16)$$

と定義することにより，$\Omega^1(V)$ から $\Omega^1(U)$ への写像が定義できる．k-形式への拡張は容易である．(1-2-7) で定義した k-形式 $\omega \in \Omega^k(V)$ に対し $\phi^*\omega \in \Omega^k(U)$ を次のように定義すればよい．

$$\begin{aligned}\phi^*\omega &= \frac{1}{k!}a_{i_1\cdots i_k}(y(x))\phi^* dy^{i_1}\wedge\cdots\wedge\phi^* dy^{i_k}\\ &= \frac{1}{k!}a_{i_1\cdots i_k}(y(x))\frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{j_1}}\cdots\frac{\partial y^{i_k}}{\partial x^{j_k}}dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_k} \qquad (1\text{-}2\text{-}17)\end{aligned}$$

例として，特に $m=n=k=2$ の場合，

$$\begin{aligned}\phi^*(dy^1\wedge dy^2) = \phi^* dy^1\wedge\phi^* dy^2 &= \frac{\partial y^1}{\partial x^i}\frac{\partial y^2}{\partial x^j}dx^i\wedge dx^j\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y^1}{\partial x^i}\frac{\partial y^2}{\partial x^j}-\frac{\partial y^1}{\partial x^j}\frac{\partial y^2}{\partial x^i}\right)dx^i\wedge dx^j\\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial(y^1,y^2)}{\partial(x^i,x^j)}dx^i\wedge dx^j = \frac{\partial(y^1,y^2)}{\partial(x^1,x^2)}dx^1\wedge dx^2\end{aligned}$$

となり，これは微積分学における2重積分の変数変換式に他ならない．

(1-2-17) により $\Omega^k(V)$ から $\Omega^k(U)$ への写像として定義された ϕ^* の性質を調べてみる．ϕ^* は次の性質をもつ．

i) $\rho, \omega \in \Omega^k(V)$ に対し　$\phi^*(\rho+\omega) = \phi^*\rho + \phi^*\omega$.

ii) $\phi^*(\lambda\wedge\mu) = \phi^*\lambda\wedge\phi^*\mu$.

iii) $d(\phi^*\omega) = \phi^*(d\omega)$.

iv) $\phi : U \to V$; $\psi : V \to W$ とすると　$(\psi\cdot\phi)^* = \phi^*\cdot\psi^*$.

iii)より ϕ が特に座標変換の場合，座標変換と外微分は，その順序によらないことを示している．したがって，外微分の定義や性質は座標のとり方にはよらないという重要な意味をもつ．i), ii)は (1-2-17) の定義から明らかなので，iii), iv) を証明しよう．ω が0-形式，すなわち関数 f の場合には $df = (\partial f/\partial y^j)dy^j$ なので

$$\phi^* df = \frac{\partial f}{\partial y^j}\frac{\partial y^j}{\partial x^i}dx^i = \frac{\partial f(y(x))}{\partial x^i}dx^i = \frac{\partial(\phi^* f(x))}{\partial x^i}dx^i = d(\phi^* f)$$

が成立するので $k=0$ の場合は証明できた．以下，帰納法で示そう．$(k-1)$-形式まで証明できたと仮定する．ϕ^* の性質 i)より ω が単項式の場合をやれば十分であるので，ω として次のものをとる．

$$\omega = a\,d\rho \;;\; \rho = y^{i_1} dy^{i_2} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k} \in \Omega^{k-1}(V) \tag{1-2-18}$$

に対し

$$\phi^* \omega = \phi^*(a\,d\rho) = (\phi^* a)(\phi^* d\rho) = (\phi^* a) d(\phi^* \rho)$$

が成り立つ．終わりの式にいくとき $(k-1)$-形式で成り立っているという仮定を用いた．したがって，

$$\begin{aligned} d(\phi^* \omega) &= d(\phi^* a) \wedge d(\phi^* \rho) = \phi^* da \wedge \phi^* d\rho \\ &= \phi^*(da \wedge d\rho) = \phi^* d(a\,d\rho) = \phi^* d\omega \end{aligned}$$

より k-形式に対しても iii)が成り立ち，iii)が証明できた．残った iv) を示そう．W 上の 0-形式，すなわち関数 f に対しては

$$\begin{aligned} [(\psi \cdot \phi)^* f](x) &= f((\psi \circ \phi)(x)) = f(\psi(\phi(x))) = (\psi^* f)(\phi(x)) \\ &= [\phi^*(\psi^* f)](x) = [(\phi^* \cdot \psi^*) f](x) \end{aligned}$$

なので iv) が成り立っている．以下 iii) の場合と同様に帰納法でやる．$(k-1)$-形式まで証明できたとし，k-形式 $\omega \in \Omega^k(W)$ の代表として

$$\omega = a\,dz^{i_1} \wedge \cdots \wedge dz^{i_k}$$

をとり，これに対して iv) が成り立つかどうかを見る．ここで z^i は W の座標である．前と同じく ω を(1-2-18)の形にとり，iii)と帰納法との仮定から

$$\begin{aligned} (\psi \cdot \phi)^* \omega &= (\psi \cdot \phi)^* a\,d((\psi \cdot \phi)^* \rho) = (\phi^* \cdot \psi^*) a\,d((\phi^* \cdot \psi^*) \rho) \\ &= (\phi^* \cdot \psi^*) a \phi^* d(\psi^* \rho) = \phi^*((\psi^* a) d(\psi^* \rho)) = \phi^*(\psi^* a \psi^* d\rho) \\ &= (\phi^* \cdot \psi^*)(a\,d\rho) = (\phi^* \cdot \psi^*) \omega \end{aligned}$$

となり iv) が成り立つ．以上で ϕ^* が i)～iv) の性質をもつことが示された．

ϕ^* は座標変換のみならず，異なった次元の領域間の写像を含む．この写像と外微分が交換可能であるという iii) の性質は，以下の応用において，重要な役割を果たす．微分形式の概念や，これを用いての計算を座標系によらずに自由に使えることは，力学の理論に応用する場合，きわめて有用なことである．

§ 1-3 ベクトル場と Lie 微分

この節では 1-形式に双対なベクトル場について考える．曲線や曲面を調べる場合，その上の点に引いた接線や接平面が重要な役割を果たす．このようなものが一般の多様体*) でも考えられればよいが，曲線や曲面が 3 次元空間の中に置かれているのと

---

*) 局所的には，$(x^1, \cdots, x^n)$ の n 個の実数 (これを局所座標系という) で指定できる点の集合のことを n 次元多様体という．ただし，近傍とか，収束とかは定義されているものとする．

異なり，多様体はもっと高い次元の空間の中に置かれているというわけではない．したがって，接線や接平面に対応するものを考えるには，工夫が必要で，このために導入されたのが接空間と呼ばれるベクトル空間である．

n 次元空間の中の領域 U の任意の点Pをとり，Pを通る任意の曲線を考える．この曲線を，座標とパラメータ t により $x^i=\phi^i(t)$ $(i=1,\cdots,n)$ と表す．$t=0$ でPを通るものとする．f をPのまわりで定義されたなめらかな関数として $f(\phi(t))=(\phi^*f)(t)$ を考える．この関数の $t=0$ における微分は

$$\frac{d}{dt}f(\phi(t))\bigg|_{t=0}=\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{d\phi^i}{dt}\bigg|_{t=0}=\frac{d\phi^i(0)}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_{\mathrm{P}} \tag{1-3-1}$$

である．$a^i=d\phi^i(0)/dt$ とすると，数ベクトル $(a^1,a^2,\cdots,a^n)$ は曲線 $\phi^i(t)$ のPにおける接ベクトルである．1つの $\phi(t)$ に対し，Pを通る1つの曲線が対応するが，独立な接ベクトルは n 個存在する．U の点Pに，基底 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ をもつベクトル空間 T_{P} を考え，上の数ベクトル $(a^1,a^2,\cdots,a^n)$ に T_{P} のベクトル

$$a=a^1e_1+a^2e_2+\cdots+a^ne_n$$

を対応させる．この n 次元のベクトル空間 T_{P} を U の点Pでの接空間と呼ぶ．(1-3-1) から基底 e_i は

$$e_i=(\partial/\partial x^i)_{\mathrm{P}}. \tag{1-3-2}$$

$(\partial/\partial x^i)_{\mathrm{P}}$ を基底とするベクトル空間 T_{P} の元 X は一意的に

$$X=\xi^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\mathrm{P}},\quad \xi^i \text{ は定数} \tag{1-3-3}$$

と表されるものとする．X はPにおけるベクトル場と呼ばれている．T_{P} がベクトル空間であるということは，

$$X=\xi^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\mathrm{P}},\quad Y=\eta^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\mathrm{P}}$$

としたとき，加法とスカラー倍が

$$\alpha X+\beta Y=(\alpha\xi^i+\beta\eta^i)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\mathrm{P}},\quad \alpha,\beta \text{ は定数}$$

で定義されていることである．

ここで上の T_{P} と前節の T_{P}^* の間の関係を考えよう．$\omega\in T_{\mathrm{P}}^*$ と $X\in T_{\mathrm{P}}$ の間の一種の積を次のように定めよう．$X,Y\in T_{\mathrm{P}}$ に対し

$$\langle\omega,\alpha X+\beta Y\rangle=\alpha\langle\omega,X\rangle+\beta\langle\omega,Y\rangle\quad(\alpha,\beta \text{ は定数}) \tag{1-3-4}$$

となるものとする．同様に $\rho,\omega\in T_{\mathrm{P}}^*$ に対しても

$$\langle \alpha\rho+\beta\omega\,,X\rangle=\alpha\,\langle\rho,X\rangle+\beta\,\langle\omega\,,X\rangle \tag{1-3-5}$$

とする．さらに $(dx^i)_{\mathrm{P}}$ と $(\partial/\partial x^j)_{\mathrm{P}}$ との内積として

$$\left\langle (dx^i)_{\mathrm{P}},\quad \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{\mathrm{P}}\right\rangle=\delta^i{}_j \tag{1-3-6}$$

と定義する．ここで $\delta^i{}_j$ は Kronecker のデルタで，$i=j$ のとき 1 で，$i\neq j$ では 0．

(1-3-4)，(1-3-5)，(1-3-6) からわかるように $T_{\mathrm{P}}{}^*$ は接ベクトル空間 T_{P} の双対空間であって，$(dx^i)_{\mathrm{P}}$ は T_{P} の基底 $(\partial/\partial x^i)_{\mathrm{P}}$ の双対基底である．ベクトル空間の双対空間とか，前節で導入した Grassmann 代数が $T_{\mathrm{P}}{}^*$, T_{P} を用いて，きちんと定義されること等については，本書ではこれ以上，立ち入らない．

一点Pでの接ベクトルが定義できたので，n 次元空間内の領域 U におけるベクトル場を定義しよう．方法は前節と同じようにすればよい．U の各点において接ベクトルをなめらかに指定することである．座標の言葉でいうと，X が U 上のベクトル場とは

$$X=\xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{1-3-7}$$

と表されることである．ここで $\xi^i(x)$ は x^i のなめらかな関数である．U 上のベクトル場の全体を $T(U)$ と書くことにする．$T(U)$ は U の接バンドルと呼ばれる．U 上の 1-形式 ω も各点での 1-形式をなめらかにつなぎ合わせたものであったので，ベクトル場 X と 1-形式 ω の積も (1-3-4)～(1-3-6) をなめらかにつなぎ合わせることによって定義される．もちろん，この場合，α,β は関数である．

ベクトル場とともに，今後重要な役割を演じる Lie 微分について述べる．再び (1-3-1) に帰ろう．座標 x^i の点が 1-パラメータ変換群 $\phi^i(t)$ によって $x_t{}^i=\phi_t{}^i(x)$ に移ったと考えよう．(1-3-1) は関数 f に対する一種の微分演算と見なされる．これを L_X と書き，X による Lie 微分と呼ぶ．すなわち

$$L_Xf(x)=\frac{d}{dt}f(\phi_t(x))=\lim_{t\to 0}\frac{f(\phi_t(x))-f(x)}{t} \tag{1-3-8}$$

一方，$\phi^i(t)$ は (1-3-1) によってベクトル場 X を (1-3-3) のように導入した．(1-3-1) は P 点における $\xi^i(x)(\partial/\partial x^i)f(x)$ に他ならない．したがって，U 上の関数に対して

$$L_Xf=Xf \tag{1-3-9}$$

よって X による Lie 微分は，U 上の関数 f に対しては，X の方向への微分に他ならない．Lie 微分は線形演算子で Leibniz の法則を満たす．すなわち

$$L_X(f+g)=L_Xf+L_Xg \ ; \ L_X(f\cdot g)=f\cdot L_Xg+L_Xf\cdot g. \qquad (1\text{-}3\text{-}10)$$

Lie 微分は 1-形式に対しても拡張され，その定義は

$$L_X\omega=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\phi_t^*(\omega(\phi_t(x)))-\omega(x)\right] \qquad (1\text{-}3\text{-}11)$$

この意味を図 1-2 で示そう．点 x で $\omega(x)$ が定義されているものとする．ベクトル場 X は，1 パラメータ変換群 ϕ_t を定める．ϕ_t により点 x が近傍の点 $y\equiv x_t=\phi_t(x)$ に移動したとする．$y\equiv x_t$ における $\omega(x_t)$ を ϕ_t^* で x での $\phi_t^*(\omega(x_t))$ に引き戻し，もとの x での $\omega(x)$ と比べたものが (1-3-11) である．

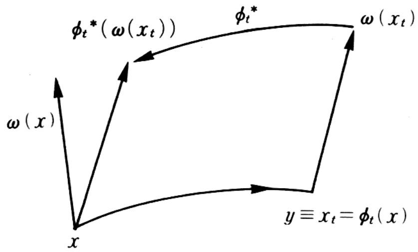


図 1-2

ベクトル場 Y に対しても同様に

$$L_XY=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\phi_t^*Y(\phi_t(x))-Y(x)] \qquad (1\text{-}3\text{-}12)$$

と定義されよう．ここで，この式を局所座標系 (x^i) によって考えよう．すなわち，$X=\xi^i(\partial/\partial x^i)$，$Y=\eta^i(\partial/\partial x^i)$ と表される．$y\equiv x_t=\phi_t(x)$ は，無限小の t に対し

$$\phi^i{}_t: \quad x^i\to y^i=x^i+t\,\xi^i+O(t^2)$$

と書かれる．よって $\partial y^i/\partial x^j$ とその逆行列 $\partial x^j/\partial y^i$ は

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^j}=\delta^i{}_j+t\frac{\partial\xi^i}{\partial x^j}+O(t^2)$$

$$\frac{\partial x^j}{\partial y^i}=\delta^j{}_i-t\frac{\partial\xi^j}{\partial x^i}+O(t^2)$$

となる．$(\phi_t^*Y)^i(x)$ は，Y の成分 $Y^i\equiv\eta^i$ を用いて*)

---

*) 次式から容易にわかる．

$$\phi_t{}^*\left(\eta^i(y)\frac{\partial}{\partial y^i}\right)=\phi_t{}^*(\eta^i(y))\phi_t{}^*\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)=\eta^j(y(x))\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$(\phi_t^* Y)^i(x) = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \eta^j(y(x))$$

と書かれる．ここで，$\eta^i(y(x))$ を x 点で展開した

$$\eta^j(y(x)) = \eta^j(x) + t\,\xi^k \frac{\partial \eta^j}{\partial x^k} + O(t^2)$$

と，上の $\partial x^j/\partial y^i$ の表式を用いると

$$(\phi_t^* Y)^i(x) - Y^i(x) = t\left(\xi^k \frac{\partial \eta^i}{\partial x^k} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\right) + O(t^2)$$

よって

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\phi_t^* Y - Y)^i = \xi^k \frac{\partial \eta^i}{\partial x^k} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}$$

を得る．右辺は次式で定義される X と Y の括弧積と呼ばれるベクトル場，

$$[X,\, Y] = (XY - YX) = \left(\xi^k \frac{\partial \eta^i}{\partial x^k} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\right)\partial/\partial x^i, \tag{1-3-13}$$

$[X, Y]$ の i 成分である．(1-3-12) から，ベクトル場 Y に対する Lie 微分は

$$L_X Y = [X,\, Y] \tag{1-3-14}$$

と定義される．テンソル場の成分 T^i_{jk} に対しても

$$(\phi_t^* T(\phi_t(x)))^i_{jk} = \frac{\partial x^i}{\partial y^l} \frac{\partial y^m}{\partial x^j} \frac{\partial y^n}{\partial x^k} T^l_{mn}(y(x))$$

に注意すると，

$$(L_X T)^i_{jk} = \xi^m \frac{\partial T^i_{jk}}{\partial x^m} - \frac{\partial \xi^i}{\partial x^m} T^m_{jk} + \frac{\partial \xi^m}{\partial x^j} T^i_{mk} + \frac{\partial \xi^m}{\partial x^k} T^i_{jm}$$

となる．ただし ξ^i は $X = \xi^i(\partial/\partial x^i)$ の成分である．以上が幾何学的に見た Lie 微分の定義である．

ここで Lie 微分を，線形写像として定義しよう．まず，引き戻し写像と外微分 d とが交換可能であったことから L_X と d とが交換可能であること，

$$dL_X = L_X d \tag{1-3-15}$$

が成り立つ．これは，関数 f に対しては次のように示される．

$$\begin{aligned} L_X df &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\phi_t^* df - df) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\{d(\phi_t^* f - f)\} \\ &= dL_X f \end{aligned}$$

この性質を考慮して，L_X を以下の式によって定義する．

$$L_X f = Xf \tag{1-3-16 a}$$

$$L_X df = d(L_X f) = d(Xf) \tag{1-3-16 b}$$

$$L_X(\omega_k \wedge \omega'_{k'}) = (L_X \omega_k) \wedge \omega'_{k'} + \omega_k \wedge (L_X \omega'_{k'}). \tag{1-3-16 c}$$

ただし ω_k は任意の k-形式である．ここで写像として定義した L_X は，先に幾何学的に定義したものと同じである．この L_X は次のような便利な性質をもつ．X と微分形式との内積を i_X とすると

$$[L_X, L_Y] = L_X L_Y - L_Y L_X = L_{[X,Y]} \tag{1-3-17 a}$$

$$L_X = d i_X + i_X d \tag{1-3-17 b}$$

$$[L_X, d] = L_X d - d L_X = 0 \tag{1-3-17 c}$$

$$[L_X, i_Y] = L_X i_Y - i_Y L_X = i_{[X,Y]} \tag{1-3-17 d}$$

ただし，内積 i_X は，　$i_X f = 0$ とする．　(1-3-17 e)

これらの公式は関数 f に対しては明らかである．また，(1-3-16)を用いると 1-形式 df に対しても容易に確かめられる．たとえば

$$(d i_X + i_X d) f = i_X df = Xf = L_X f,$$

$$(d i_X + i_X d) df = d i_X (df) = d(Xf) = d L_X f = L_X df.$$

2-形式以上の任意の形式についても，上を繰り返し，帰納法によりこの公式が成立することが証明できる．

終わりに，外微分 d，Lie 微分 L_X，内積 i_X を写像として統一して定義しておこう．そのために，k-形式 ω_k とベクトル $X_1, \cdots, X_k$ の内積 $\omega_k(X_1, \cdots, X_k)$ を導入しよう．この際，1-形式 $\omega = a_i dx^i$，ベクトル場 $X = \xi^i (\partial/\partial x^i)$ に対しては $\omega(X) = a_i \xi^i$；1-形式 ω および θ と X_1, X_2 との内積は

$$\omega \wedge \theta (X_1, X_2) = \omega(X_1)\theta(X_2) - \omega(X_2)\theta(X_1)$$

とする．$\omega = a_i dx^i$，$X_1 = b_1^i (\partial/\partial x^i)$，$X_2 = b_2^i (\partial/\partial x^i)$ とすると

$$d\omega(X_1, X_2) = \frac{\partial a_i}{\partial x^j}\{dx^j(X_1) dx^i(X_2) - dx^j(X_2) dx^i(X_1)\}$$

$$= \frac{\partial a_i}{\partial x^j}(b_1^j b_2^i - b_2^j b_1^i),$$

$$X_1 \omega(X_2) = b_1^j \frac{\partial}{\partial x^j}(a_i b_2^i),$$

$$\omega([X_1, X_2]) = a_i dx^i \left(b_1^j \frac{\partial b_2^k}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^k} - b_2^j \frac{\partial b_1^k}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^k} \right) = a_i \left(b_1^j \frac{\partial b_2^i}{\partial x^j} - b_2^j \frac{\partial b_1^i}{\partial x^j} \right)$$

であるので次の関係式が恒等的に成り立つ．

$$d\omega(X_1, X_2) = X_1\omega(X_2) - X_2\omega(X_1) - \omega([X_1, X_2]) \tag{1-3-18}$$

ω が k-形式 ($k \geq 2$) の場合は*)

$$d\omega(X_1, \cdots, X_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}X_i(\omega(X_1, \cdots, \widehat{X}_i, \cdots, X_{k+1})) + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i, X_j], X_1, \cdots, \widehat{X}_i, \cdots, \widehat{X}_j, \cdots, X_{k+1}). \tag{1-3-19}$$

L_X に対しては

$$(L_X\omega)(X_1, \cdots, X_k) = X(\omega(X_1, \cdots, X_k)) - \sum_{i=1}^{k}\omega(X_1, \cdots, [X, X_i], \cdots, X_k), \tag{1-3-20}$$

内積に対しては

$$(i(X)\omega)(X_1, \cdots, X_{k-1}) = \omega(X, X_1, \cdots, X_{k-1}) \tag{1-3-21}$$

である．

§ 1-4 積分可能条件

この節では偏微分方程式の積分可能条件を微分形式の言葉で言い換えることから始め，Frobenius の定理について述べる．

話を具体的に進めるために，簡単な次の偏微分方程式系から出発しよう．

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a(x, y)\ ;\ \frac{\partial u}{\partial y} = b(x, y) \tag{1-4-1}$$

この系の積分可能条件 $\partial^2 u/\partial x\partial y = \partial^2 u/\partial y\partial x$ は

$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x} \tag{1-4-2}$$

で与えられる．一方，(1-4-1) は，次の Pfaff 方程式 (1-形式=0 とおく式)，

$$\omega = du - a(x, y)dx - b(x, y)dy = 0 \tag{1-4-1$'$}$$

と同値である．この式は

$$\rho = a(x, y)dx + b(x, y)dy \tag{1-4-3}$$

が全微分 du に等しいということを示している．解 u が存在すれば，§ 1-2 の 外微

*) $\widehat{X}_i$ はこの因子は除くという意味．

分 d の性質　$d^2=0$ より

$$d\rho=\left(\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial y}\right)dx\wedge dy=d(du)=0 \tag{1-4-4}$$

が得られ積分可能条件 (1-4-2) が求まる．

重要なことはこの逆が成り立つことである．積分可能条件 (1-4-2) が成立していれば，$\rho=du$ とおける．一方 (1-4-2) が成立していれば，(1-4-4) から $d\rho=0$ となる．すなわち 1-形式 (1-4-3) が $d\rho=0$ を満たせば，$\rho=du$ なる u が "局所的" に存在する．この定理を Poincaré の補題という．ここで局所的ということを少し説明しておく

例として，次の 1-形式

$$\rho=(x^2+y^2)^{-1}(xdy-ydx)$$

をとると，

$$\begin{aligned}d\rho&=-2(x^2+y^2)^{-2}(xdx+ydy)\wedge(xdy-ydx)+(x^2+y^2)^{-1}d(xdy-ydx)\\&=-2(x^2+y^2)^{-1}dx\wedge dy+2(x^2+y^2)^{-1}dx\wedge dy=0\end{aligned}$$

が示され，

$$\rho=d\left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)$$

で表されるから，$u=\tan^{-1}(y/x)$ で与えられる．この ρ は $(x,y)\neq(0,0)$ において定義できているが，$u=\tan^{-1}(y/x)$ は $x>0$，$x<0$ で別々に定義された連続な関数で，$x=0$ でつながらない．ρ の定義域全体にわたっては(すなわち，大局的には)いえないという意味で局所的に成立すると述べたのである．一般に，$d\rho=0$ である ρ を閉じた (closed) 微分形式，$\rho=du$ である ρ を完全 (exact) な微分形式と呼んでいる．exact → closed であるが，逆は局所的にしかいえない*)．

これまでは 2 次元の空間で考えたが，3 次元空間でも同様で，1-形式

$$\rho=adx+bdy+cdz$$

が $d\rho=0$ を満たせば，$\rho=df$ と書ける関数 f が存在する．これはベクトル解析の場合の，ベクトル $\boldsymbol{A}=(a,b,c)$ が $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}=0$ であれば，$\boldsymbol{A}=\mathrm{grad}\,f$ であるということに対応している．以上の簡単な例を一般化して次の定理を得る．

*) 閉じているものを cocycle，exact なのを coboundary ともいう．

定理（Poincaré 補題の逆）

ω が n 次元空間 $\boldsymbol{R}^n$ 上の k-形式で $d\omega=0$ のときには，$\omega=d\theta$ を満たす $\boldsymbol{R}^n$ 上の $(k-1)$-形式の θ が存在する．

この証明を，θ の形を実際に求めることによって行う．ω を k-形式とし，

$$\omega=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} a_{i_1\cdots i_k}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$$

と表す．§ 1-2 で導入した写像 ϕ として，次の $\boldsymbol{R}^{n+1}$ から $\boldsymbol{R}^n$ への写像

$\phi(\tau, x^1, \cdots, x^n)=(\tau x^1, \tau x^2, \cdots, \tau x^n)$ （τ の範囲は $(0,1)$ を含む開区間）

を考える．引き戻された写像 ϕ^* は

$$\begin{aligned}\phi^*\omega=&\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\tau^k a_{i_1\cdots i_k}(\tau x^1, \cdots, \tau x^n)dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}\\&+\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\sum_{s=1}^{k}(-1)^{s-1}\tau^{k-1}a_{i_1\cdots i_s\cdots i_k}(\tau x^1, \cdots, \tau x^n)x^{i_s}\\&\times d\tau\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{dx}^{i_s}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}\end{aligned}\qquad\text{(a)}$$

ここで，$\widehat{dx}^{i_s}$ は $dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$ の中で dx^{i_s} は落とすことを意味する．§ 1-2 の結果 $d\phi^*\omega=\phi^*d\omega$ を用い，$d\omega=0$ を考慮すると，(a) を外微分して，$d\tau\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$ の係数をとると，0 とならなければならない．よって (1-2-8) の注を参照し

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(\tau^k a_{i_1\cdots i_k})=\sum_{l=1}^{k+1}(-1)^{l-1}\frac{\partial}{\partial x^{i_l}}\left\{\sum_{s=1}^{k+1}(-1)^{s-1}\tau^{k-1}a_{i_1\cdots\hat{i_l}\cdots i_s\cdots i_{k+1}}(\tau x^1, \cdots, \tau x^n)x^{i_s}\right\}$$

この両辺を τ について 0 から 1 まで積分すると

$$a_{i_1\cdots i_k}(x)=\sum_{l=1}^{k+1}(-1)^{l-1}\int_0^1 d\tau\frac{\partial}{\partial x^{i_l}}\{\sum(-1)^{s-1}\tau^{k-1}a_{i_1\cdots\hat{i_l}\cdots i_s\cdots i_{k+1}}(\tau x^1, \cdots, \tau x^n)x^{i_s}\}\qquad\text{(1-4-5)}$$

したがって

$$\begin{aligned}\theta=&\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\sum_{s=1}^{k}(-1)^{s-1}\\&\times\int_0^1 d\tau\tau^{k-1}a_{i_1\cdots i_s\cdots i_k}(\tau x^1, \cdots, \tau x^n)x^{i_s}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{dx}^{i_s}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}\end{aligned}\qquad\text{(1-4-6)}$$

が求めるものである．実際，この θ の $d\theta$ を求め，(1-4-5) を使えば，ω になることが確かめられる． （証明終わり）

この公式は有用で，最近の量子異常項の議論にもよく用いられている．

上の定理により，1-形式

$$\omega = a_i dx^i \qquad (i=1, \cdots, n) \tag{1-4-7}$$

が，$u=u(x)$ の全微分のときは，$d\omega=0$ で，逆にこれが成立していれば，局所的に $\omega=du$ であった．しかし

$$\omega=0$$

という微分方程式を考えると，ω が全微分でないときでも

$$\omega = g du \tag{1-4-8}$$

と書かれるなら $u=$一定 という解が存在する．2次元の場合は常に (1-4-8) のように書かれる．一般の n 次元の場合に (1-4-8) のように書かれる必要十分条件を求めよう．

(1-4-8) を外微分すると

$$d\omega = dg \wedge du = \frac{1}{g} dg \wedge g du = \frac{1}{g} dg \wedge \omega$$

となり，(1-4-8) が成り立っていると

$$d\omega = \theta \wedge \omega \tag{1-4-9}$$

となるような 1-形式 θ が存在する．逆に (1-4-9) が成り立ったとし，θ を

$$\theta = b_i dx^i$$

として，これと，(1-4-7) を (1-4-9) に入れた式

$$\frac{\partial a_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i = b_j a_i dx^j \wedge dx^i$$

から

$$\frac{\partial a_i}{\partial x^j} - \frac{\partial a_j}{\partial x^i} = b_j a_i - b_i a_j \tag{1-4-10}$$

が得られる．ここで (1-4-10) の解の一意性は仮定することにして，a_i を

$$a_i = g \frac{\partial u}{\partial x^i} \tag{1-4-11}$$

の形で求めてみよう．これを (1-4-10) に代入すると

$$\frac{\partial g}{\partial x^j} \frac{\partial u}{\partial x^i} - \frac{\partial g}{\partial x^i} \frac{\partial u}{\partial x^j} = b_j g \frac{\partial u}{\partial x^i} - b_i g \frac{\partial u}{\partial x^j}$$

となり，b_i として

$$b_i = \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x^i} \qquad (1\text{-}4\text{-}12)$$

が得られる．したがって (1-4-11)，(1-4-12) は (1-4-10) を満たす．よって(1-4-9) が成り立てば，

$$\omega = a_i dx^i = g\frac{\partial u}{\partial x^i}dx^i = g\,du$$

となり，(1-4-8) が成り立つ．これで (1-4-9) が (1-4-8) のように書かれるための必要十分条件であることが示された．

1-形式 $\omega = a_i dx^i$ が (1-4-8) のように $\omega = g\,du$ と書ける場合，ω は du と同値であるという．ω が du と同値であれば Pfaff 方程式 $\omega = 0$ の解は $u =$ 定数 で与えられる．これから Pfaff 方程式 $\omega = 0$ は ω が du と同値であるとき，完全積分可能という．したがって $\omega = 0$ が完全積分可能であるための必要十分条件は $d\omega = \theta \wedge \omega$ となるような 1-形式 θ が存在することである．

以上の議論をさらに一般化して，n 次元空間における連立 Pfaff 方程式系 Ω：

$$\omega_\alpha = a_{\alpha i} dx^i = 0 \qquad (\alpha = 1, \cdots, k) \qquad (1\text{-}4\text{-}13)$$

を考える．1-形式の系 $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_k\}$ と $\Pi = \{\pi_1, \cdots, \pi_l\}$ が同値であるとは，すべての α に対して ω_α が $\pi_1, \cdots, \pi_l$ の線形結合 $\omega_\alpha = g_\alpha{}^\beta(x)\pi_\beta$ で書け，π_β も $\omega_1, \cdots, \omega_k$ の線形結合で書ける場合をいう．ただし，独立なものの数は Ω と Π で一致する．また，Pfaff 方程式系 Ω が完全積分可能とは，Ω が $df^1, df^2, \cdots, df^k$ と同値，すなわち

$$\begin{cases} f^\alpha(x^1, \cdots, x^n) = c^\alpha \quad (\alpha = 1, \cdots, k), \quad c^\alpha \text{ は任意定数.} \\ (k \times n)\text{行列} \left(\dfrac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\right) \text{の階数が } k \end{cases} \qquad (1\text{-}4\text{-}14)$$

のような解が存在するときをいう．これは次のようにもいえる．

$$\begin{cases} \text{適当な変数変換 } x^i = \phi^i(y^1, \cdots, y^n) \text{ を行って} \\ \omega_\alpha = b_{\alpha\beta}(y^1, \cdots, y^n)dy^\beta \text{ となるとき，完全積分可能.} \end{cases} \qquad (1\text{-}4\text{-}15)$$

これは k 個の ω_α が k 個の $dy^1, \cdots, dy^k$ の微分で書けることである．(1-4-14) は $(n-k)$ 次元の部分空間を決める．(1-4-14) → (1-4-15) は次のように示される．(1-4-14) より，添字の番号を適当につけ，$\det(\partial f_\alpha / \partial x^\beta) \neq 0$ $(\alpha, \beta = 1, \cdots, k)$ と考える．次のような変換

$$y^\alpha = f_\alpha(x^1, \cdots, x^n) \quad (\alpha = 1, \cdots, k)\,; \quad y^s = x^s \quad (s = k+1, \cdots, n)$$

を行うと

$$\omega_\alpha=\sum_{\beta=1}^{k} b_{\alpha\beta}(y^1,\cdots,y^n)dy^\beta+\sum_{s=k+1}^{n} b_{\alpha s}(y^1,\cdots,y^n)dy^s$$

の形になる．c^α を定数とすると，f_α は $\omega_\alpha=0$ の積分であるので

$$y^\alpha=c^\alpha \qquad (\alpha=1,\cdots,k)$$

に対し $\omega_\alpha=0$ であるから $b_{\alpha s}(c^1,\cdots,c^k,y^{k+1},\cdots,y^k)=0$．$c^\alpha$ は任意なので $b_{\alpha s}(y^1,\cdots,y^n)$ が 0 となり (1-4-15) が得られる．逆に，(1-4-15) → (1-4-14) を示そう．(1-4-13) の ω_α は独立なので (1-4-15) の ω_α も独立となり，$\omega_\alpha=0\ (\alpha=1,\cdots,k)$ から

$$dy^\alpha=0,\quad y^\alpha=c^\alpha \qquad (\alpha=1,\cdots,k).$$

$y^\alpha=f^\alpha(x^1,\cdots,x^n)$ とおくと (1-4-14) が成り立ち，両者の同値が示された．

Pfaff 方程式系 Ω に対しベクトル場の系 $A(\Omega)$ を

$$A(\Omega)=\{X\mid\langle\omega_\alpha,X\rangle=0,\ \alpha=1,\cdots,k\} \qquad (1\text{-}4\text{-}16)$$

で定義する．$A(\Omega)$ を Ω の生成系という．$A(\Omega)$ は t 次元ベクトル空間で，その生成子を $\mathcal{X}=\{X_1,\cdots,X_t\}$ とする．t 個の連立線形偏微分方程式系

$$X_1(f)=X_2(f)=\cdots=X_t(f)=0 \qquad (1\text{-}4\text{-}17)$$

を考える．もし f が (1-4-17) の解であれば，$[X_i,X_j]f=0$ を満たす．これからベクトル場の系 $\{X_1,\cdots,X_t\}$ が完全系であるとは，すべての i,j について

$$[X_i,X_j]=C_{ij}^k X_k \qquad (1\text{-}4\text{-}18)$$

が成り立つような関数 C_j^k が存在するときをいう．このとき次の定理が成り立つ．

定理 (Frobenius)

次の 3 つの条件は同値である．

Ⅰ)　Pfaff 方程式系 Ω ((1-4-13)) が完全積分可能である．

Ⅱ)　Ω の生成系 $A(\Omega)$ は完全である．

Ⅲ)　すべての $\omega_\alpha\in\Omega$ に対して

$$d\omega_\alpha=\theta_\alpha{}^\beta\wedge\omega_\beta \qquad (1\text{-}4\text{-}19)$$

となるような 1-形式 θ_α^β が存在する．

この定理は，今後しばしば使われるので，Ⅲ)とⅠ)，Ⅲ)とⅡ)の同値性を示すことによって証明しよう．まずこの Frobenius の定理の主要部分であるⅠ)とⅢ)の同値性から始めよう．

(1-4-19) が必要条件であることを示そう．(1-4-15) で示したように，完全積分可能とは適当な変数変換をし

$$\omega_\alpha = b_{\alpha\beta}(y^1, \cdots, y^n)dy^\beta \tag{i}$$

とできることであった．したがって

$$d\omega_\alpha = db_{\alpha\beta} \wedge dy^\beta \qquad (\alpha = 1, \cdots, k). \tag{ii}$$

(i)は 1 次独立なので

$$dy^\alpha = c^{\alpha\beta}\omega_\beta$$

と表し，(ii)に代入すると (1-4-19) の $d\omega_\alpha = \theta_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta$ の形になる．

次に十分条件であることを示す．(1-4-13) は 1 次独立なので $(k \times n)$ 行列 $a_{i\alpha}$ の階数は k である．したがって (1-4-15) を導く際にやったように，

$$\det(a_{\alpha\beta}) \neq 0 \qquad (\alpha, \beta = 1, \cdots, k)$$

$\omega_\alpha = a_{\alpha i}dx^i = 0$ を dx^α $(\alpha = 1, \cdots, k)$ について解く．

$$dx^\alpha = \sum_{s=k+1}^{n} A^\alpha{}_s(x^1, \cdots, x^n)dx^s \tag{iii}$$

よって $x^\alpha = x^\alpha(x^s)$ なる解を求めればよいことになる．これを常微分方程式化して解こう．

U の中の一点 $(x_0^i) = (x_0^\alpha, 0)$ を固定し，直線

$$x^s = v^s\tau \tag{iv}$$

を考える．v^s は任意の定数で直線の方向を示すパラメータである．$dx^s/d\tau = v^s$ と (iii) から

$$\frac{dx^\alpha}{d\tau} = \sum_{s=k+1}^{n} A^\alpha{}_s(x^\beta, v^t\tau)v^s \tag{v}$$

$$(\alpha, \beta = 1, \cdots, k\,;\, s, t = k+1, \cdots, n)$$

(v)を初期値，$\tau = 0$ のとき $x^\alpha = x_0^\alpha = c^\alpha$ のもとで解くことになる．この τ を変数とした常微分方程式の解を

$$x^\alpha = \psi^\alpha(\tau, v^s, c^\beta) \tag{vi}$$

とすると

$$c^\alpha = \psi^\alpha(0, v^s, c^\beta) \tag{vii}$$

となる．

ここで v^s, τ の動く範囲を十分小さいとして話を進める．I_τ を $(-\epsilon, \epsilon)$ の開区間，

v^s の領域を V とする．われわれが示さねばならぬのは，τ, v^s を変数と見て，(vi)，(iv) が $\omega_\alpha=0$ を満たすことである．次の写像 ϕ を考える．

$$\phi : I\times V \to U, \quad \phi(\tau, v^s)=(\psi^\alpha(\tau, v^s, c^\beta), v^s\tau)$$

すなわち（§ 1-2 参照）

$$\phi^* x^\alpha \equiv x^\alpha \circ \phi = \psi^\alpha(\tau, v^s, c^\beta)\ ;\ \phi^* x^s = x^s \circ \phi = v^s\tau. \tag{viii}$$

引き戻された写像 ϕ^* を用いると，われわれの証明すべきことは $\phi^*\omega=0$ である．(iii)より，

$$\phi^*\omega_\alpha = d\psi^\alpha - \sum_{s=k+1}^{n} A^\alpha{}_s(\psi^\alpha(\tau, v^s, c^\beta), v^t\tau)(v^s d\tau + \tau dv^s)$$

$$= \frac{d\psi^\alpha}{d\tau}(\tau, v, c)d\tau + \sum_{s=k+1}^{n} \frac{\partial\psi^\alpha}{\partial v^s}(\tau, v, c)dv^s - \sum A^\alpha_s(\psi^\alpha, v^t\tau)(v^s d\tau + \tau dv^s)$$

$\psi^\alpha(\tau, v, c)$ は τ の関数として(v)の解であるので，$d\tau$ の係数は 0 である．したがって

$$\phi^*\omega_\alpha = \sum_{s=k+1}^{n} B^\alpha{}_s(\tau, v, c)dv^s \tag{ix}$$

ただし

$$B^\alpha{}_s(\tau, v, c) = \frac{\partial\psi^\alpha}{\partial v^s}(\tau, v, c) - A^\alpha{}_s(\psi^\alpha(\tau, v, c), v^t\tau)\cdot\tau$$

(vii)より，$\tau=0$ では

$$B^\alpha{}_s(0, v, c)=0 \tag{x}$$

(ix)より

$$\phi^*(d\omega_\alpha) = d(\phi^*\omega_\alpha) = \sum_{s=k+1}^{n} \frac{\partial B^\alpha{}_s}{\partial\tau} d\tau\wedge dv^s + \sum_{s,t=k+1}^{n} \frac{\partial B^\alpha{}_s}{\partial v^t} dv^t\wedge dv^s \tag{xi}$$

ここで Frobenius の条件式 (1-4-19) を用いると

$$\phi^*(d\omega_\alpha) = \sum_{\beta=1}^{k} \phi^*(\theta_\alpha^\beta)\wedge\phi^*(\omega_\beta) \tag{xii}$$

$\phi^*(\theta_\alpha^\beta)$ を

$$\phi^*(\theta_\alpha^\beta) = C_{\alpha\beta}d\tau + D_{\alpha\beta s}dv^s$$

とおいて (xi) と (xii) の $d\tau\wedge dv^s$ の係数を比べると

$$\frac{\partial B^\alpha{}_s}{\partial\tau} = \sum_{\beta=1}^{k} C_{\alpha\beta}B^\beta{}_s \tag{xiii}$$

(x)より $\tau=0$ で $B^\alpha{}_s=0$．一般に微分方程式 $dx^\alpha/d\tau = \sum_{\beta=1}^{k} C_{\alpha\beta}(\tau, x)x^\beta$ の解で，$\tau=0$

のとき $x^\alpha=0$ を満たすものは $x^\alpha\equiv 0$ に限られる．よって

$$B^\alpha{}_s(\tau, v, c)\equiv 0 \qquad \text{(xiv)}$$

したがって，(ix)より

$$\phi^*\omega_\alpha=0 \qquad \text{(xv)}$$

となり，τ, v^s を変数と見ると (iv)，(vi) が $\omega_\alpha=0$ を満たしていることがわかった．

(iv)，(v) の両式から，(vi) は任意の実数 l に対し

$$x^\alpha=\psi^\alpha(l\tau, v^s/l, c^\beta) \qquad \text{(xvi)}$$

とも書けることがわかる．いま，$l=1/\tau$ とすると，$x^\alpha=\psi^\alpha(1, v^s\tau, c^\alpha)$ であり，

$$x^\alpha=\psi^\alpha(x^s, c^\beta) \qquad \text{(xvii)}$$

と書け，(iii)のすぐ下のところで述べた解，$x^\alpha=x^\alpha(x^s)$ となる．

(vii) より，$x^s=0$ では

$$\det\left(\frac{\partial\psi^\alpha}{\partial c^\beta}\right)=\det(\delta_\alpha^\beta)=1\neq 0$$

なので，$x^s=0$ の近くでは，$x^\alpha=\psi^\alpha(x^s, c^\beta)$ を c^β について解き

$$c^\beta=f^\beta(x^s, x^\alpha) \qquad (\beta=1, \cdots, k) \qquad \text{(xviii)}$$

と見ることができる．この上では $\omega_\alpha=0$ である．(xviii) で c^α は任意の値をとりうるので，逆関数における公式から

$$\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\ \text{の階数}=k \qquad \text{(xix)}$$

したがって (1-4-14) の意味での完全積分可能がいえ，Ⅰ)とⅢ)との同値が示された．

次に，Ⅱ)とⅢ)の同値を示そう．§ 1-3 の (1-3-18) で与えた公式

$$d\omega_\alpha(X_\beta, X_\gamma)+\omega_\alpha([X_\beta, X_\gamma])=X_\beta\omega_\alpha(X_\gamma)-X_\gamma\omega_\alpha(X_\beta)$$
$$1\leq\alpha\leq k\ ;\ 1\leq\beta<\gamma<t$$

を用いる．X_β, X_γ は $A(\Omega)$ の生成子だから $\omega_\alpha(X_\beta)=\omega_\alpha(X_\gamma)=0$ となるので上式は

$$d\omega_\alpha(X_\beta, X_\gamma)+\omega_\alpha([X_\beta, X_\gamma])=0 \qquad \text{(xx)}$$

$A(\Omega)$ が完全系であれば (1-4-18) より $\omega_\alpha([X_\beta, X_\gamma])=0$ だから

$$d\omega_\alpha(X_\beta, X_\gamma)=0. \qquad \text{(xxi)}$$

Ω と同値な系 $\Pi(\pi_1, \cdots, \pi_l)$ を，添字の番号を適当にとり，

$$\pi_\alpha=dx^\alpha+\sum_{s>l}^{n} b^\alpha{}_s dx^s \qquad (1\leq\alpha\leq l) \qquad \text{(xxii)}$$

とする．このとき $d\omega_\alpha$ は，$\omega_\alpha = q_\alpha{}^\beta \pi_\beta$ と (xxii) とから

$$d\omega_\alpha = \sum_{\beta=1}^{l} \theta_\alpha^\beta \wedge \pi_\beta + \sum_{u>s}^{n} e_{\alpha s u} dx^s \wedge dx^u \qquad \text{(xxiii)}$$

と書くことができる．ここに θ_α^β は x^α，x^5 に依存する 1-形式である．

ここで各 $s\,(l<s\leq n)$ に対して，Y_s を $Y_s(\pi_\alpha)=0$ になるように

$$Y_s = \frac{\partial}{\partial x^s} - \sum_{\alpha=1}^{l} b^\alpha{}_s \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \qquad \text{(xxiv)}$$

と定義し，

$$\mathcal{Y} = \{ Y_{l+1}, \cdots, Y_n \} \qquad \text{(xxv)}$$

とすると，$\mathcal{Y}$ は $\mathcal{X}$ と同値なので，(xxi) と同様に

$$d\omega_\alpha(Y_s, Y_u) = 0 \qquad (l<s<u\leq n) \qquad \text{(xxvi)}$$

(xxiii) と (xxiv) より

$$e_{\alpha s u} = 0 \qquad \text{(xxvii)}$$

よって，(xxiii) は

$$d\omega_\alpha = \theta_\alpha^\beta \wedge \pi_\beta = 0 \quad \mathrm{mod}(\Omega) \qquad \text{(xxviii)}$$

すなわち，$d\omega_\alpha(X_\beta, X_\gamma)=0$ なら $d\omega_\alpha=0\quad \mathrm{mod}(\Omega)$ となり，II)からIII)が示された．

逆に Ω がIII)を満たせば，$d\omega_\alpha=0\quad \mathrm{mod}(\Omega)$ であるので

$$d\omega_\alpha(X_\beta, X_\gamma)=0$$

(xx) より

$$[X_\beta, X_\gamma] = \in A(\Omega) \qquad \text{すなわち} \qquad [X_\beta, X_\gamma]=0 \quad \mathrm{mod}(\mathcal{X})$$

III) → II)が示され，II)とIII)が同値であることが証明された．　(証明終わり)

一般に，与えられたPfaff方程式系が完全積分可能でないとき，それらに新たに1-形式を追加することにより，積分可能なPfaff方程式系をつくることができる．こうして得られた，Pfaff方程式系 Ω を含む完全積分可能なPfaff方程式系を $\Omega=\{\omega^1, \cdots, \omega^r\}$ の特性系という．ここで特性系のつくり方を示そう．

$$\Omega = \{\omega^1, \cdots, \omega^r\}$$

と直交するベクトル場の全体，すなわち生成系を $A(\Omega)$ とする．すべての $Y\in A(\Omega)$ に対して $[X, Y]\in A(\Omega)$ となるような $X\in A(\Omega)$ の全体を $\mathrm{Ch}(\Omega)$ で表すことにする：

$$\mathrm{Ch}(\Omega) : \{X \mid \omega^\alpha(X)=\omega^\alpha(Y)=0,\ \forall Y \text{ に対し } \omega^\alpha([X, Y])=0\} \qquad (1\text{-}4\text{-}20)$$
$$\alpha = 1, 2, \cdots, r$$

このように定義されたCh(Ω)はΩの生成系のうちで，交換子積について閉じているもの，すなわち完全系をなすベクトル場の最大集合ということになる．したがってCh(Ω)はFrobeniusの定理から完全積分可能であるので，結局 Ω を含み，Ch(Ω)と直交する1-形式の最小の系を求めれば，それがΩの特性系であるということになる．

Ch(Ω)$\ni X$ であるための必要十分条件は次のように書かれる．

$$\omega^\alpha(X)=\omega^\alpha(Y)=0\,;\ d\omega^\alpha(X,Y)=0 \qquad (\alpha=1,\cdots,r) \tag{1-4-21}$$

ここで第2の式は，Frobeniusの定理の証明の際に述べたように $\omega^\alpha([X,Y])=0$ と同値である．(1-4-21)からΩの特性系を求めよう．

$$\omega^\alpha=a^\alpha{}_i(x)dx^i=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1-4-22}$$

$$X=b^i\frac{\partial}{\partial x^i}\,;\ Y=c^i\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{1-4-23}$$

とおくと，

$$a^\alpha{}_i b^i=0\,;\ a^\alpha{}_i c^i=0 \tag{1-4-24}$$

$$\left(\frac{\partial a^\alpha{}_j}{\partial x^i}-\frac{\partial a^\alpha{}_i}{\partial x^j}\right)(b^i c^j)=0 \tag{1-4-25}$$

c^i は (1-4-24) を満たす限り任意である．特性系をつくるために付け加える1-形式は，未定の1-形式 $\lambda^\alpha{}_\beta$ を用いて次のように与えられることを示そう．

$$a^\alpha{}_{ij}dx^j+\lambda^\alpha{}_\beta a^\beta{}_i=0 \tag{1-4-26}$$

ただし

$$a^\alpha{}_{ij}=-a^\alpha{}_{ji}=\frac{\partial a^\alpha{}_j}{\partial x^i}-\frac{\partial a^\alpha{}_i}{\partial x^j} \tag{1-4-27}$$

(1-4-26) と $X=b^j\dfrac{\partial}{\partial x^j}$ との内積をとると，未定の $\nu^\alpha{}_\beta$ を $\nu^\alpha{}_\beta=\langle\lambda^\alpha{}_\beta,\ X\rangle$ として

$$a^\alpha{}_{ij}b^j+\nu^\alpha{}_\beta a^\beta{}_i=0$$

で与えられる．これは (1-4-25) の解になっており，(1-4-26) は求める1-形式である．よって，

$$\begin{aligned}\omega^\alpha&\equiv a^\alpha{}_i dx^i=0\\ a^\alpha{}_{ij}dx^j&+\lambda^\alpha{}_\beta a^\beta{}_i=0\end{aligned} \tag{1-4-28}$$

から，未定の $\lambda^\alpha{}_\beta$ を消去して得られる1-形式がΩの特性系である．定義から特性系は完全積分可能である．Frobeniusの定理から，Ωが完全積分可能であるための必要十分条件は，Ωとその特性系が同値になることである．

例として，Ωが

$$\omega^\alpha=dx^\alpha+\sum_{\lambda>r}^{n}a^\alpha{}_\lambda dx^\lambda \tag{1-4-29}$$

のときの特性系を求めよう．(1-4-27) の $a^{\alpha}{}_{ij}$ は

$$a^{\alpha}{}_{\beta\gamma}=0\ ;\ a^{\alpha}{}_{\beta\lambda}=-a^{\alpha}{}_{\lambda\beta}=\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}a^{\alpha}{}_{\lambda}\ ;\ a^{\alpha}{}_{\mu\gamma}=\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}a^{\alpha}{}_{\lambda}-\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}a^{\alpha}{}_{\mu}$$

$$(\alpha,\beta,\gamma=1,2,\cdots,r\ ;\ \lambda,\mu=r+1,\cdots,n)$$

(1-4-28) は

$$\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}a^{\alpha}{}_{\lambda}\cdot dx^{\lambda}+\lambda^{\alpha}{}_{\beta}=0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}a^{\alpha}{}_{\lambda}-\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}a^{\alpha}{}_{\mu}+a^{\beta}{}_{\lambda}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}a^{\alpha}{}_{\mu}\right)dx^{\lambda}+\lambda^{\alpha}{}_{\beta}a^{\beta}{}_{\mu}=0$$

である．これから $\lambda^{\alpha}{}_{\beta}$ を消去すると Ω の特性系として

$$\omega^{\alpha}=0\ ;\ \theta^{\beta}{}_{\lambda}=0 \qquad (1\leq\alpha,\beta\leq r,\ \ r<\lambda\leq n) \tag{1-4-30}$$

ただし

$$\theta^{\beta}{}_{\lambda}=\sum_{\mu>r}^{n}b^{\beta}{}_{\lambda\mu}dx^{\mu} \qquad (1\leq\beta\leq r<\lambda\leq n) \tag{1-4-30$'$}$$

ここで

$$b^{\beta}{}_{\lambda\mu}=X_{\lambda}a^{\beta}{}_{\mu}-X_{\mu}a^{\beta}{}_{\lambda}\ ;\ X_{\lambda}=\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}-\sum_{\alpha=1}^{r}a^{\alpha}{}_{\lambda}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}.$$

終わりに，力学系の正準形式理論において，重要な役割を果たす Darboux の定理を書いておく．

1-形式

$$\omega=a_i(x^1,\cdots,x^n)dx^i\neq 0$$

の外微分をとると

$$d\omega=\frac{1}{2}a_{ij}dx^i\wedge dx^j$$

ここで

$$a_{ij}=-a_{ji}=\frac{\partial a_j}{\partial x^i}-\frac{\partial a_i}{\partial x^j} \tag{1-4-31}$$

行列 Δ を

$$\Delta=(a_{ij}),\quad 1\leq i,j\leq n \tag{1-4-32}$$

とし，この Δ の階数を $2r$ とする (a_{ij} は反対称テンソルなので Δ の階数は偶数)．次の $(n+1)$ 次 の反対称行列を導入する．

$$\Gamma=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} & a_1 \\ a_{21} & 0 & \cdots\cdots & a_{2n} & a_2 \\ \vdots & & \cdots\cdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & 0 & a_n \\ -a_1 & -a_2 & \cdots\cdots & -a_n & 0 \end{pmatrix} \tag{1-4-33}$$

Darboux の定理

1） Γ と Δ の階数がともに $2r$ であると，独立な関数 $z^1,\cdots,z^{2r}$ が存在して ω は

$$\omega=\sum_{i=1}^{r} z^{r+i}dz^i \tag{1-4-34}$$

と表される．

2） Γ の階数が $(2r+2)$ で Δ のが $2r$ なら，独立な関数 $z^1,\cdots,z^{2r+1}$ が存在して

$$\omega=\sum_{i=1}^{r} z^{r+i}dz^i+dz^{2r+1} \tag{1-4-35}$$

である．どちらの場合でも

$$d\omega=\sum_{i=1}^{r} dz^{r+i}\wedge dz^i$$

と書かれる．

証明は長くなるので省略する[1]．

第2章　変　分　原　理

§ 2-1　拘束条件と自由度

解析力学の特徴のひとつは，座標系の変換を自由に行い，問題の解明に都合のよい一般座標系を用いて記述しうること，しかも，その一般座標変換によって理論形式が変わらないところにある．対象とする力学系のすべての力学的情報を担っているLagrange関数やHamilton関数はもとより，運動方程式は共変形である．このことは，その理論形式が，座標系のとり方によらないことを意味している．したがって，座標系によらない微分形式を用いて記述すると非常に整備された美しい理論形式にまとめることができる．

座標変換を行う際に，力学系の自由度が重要な意味をもってくる．自由度はその力学系を特徴づける概念のひとつである．そこで，まず拘束条件と自由度の関係から話を始めよう．たとえば，3次元空間におけるn質点系をデカルト座標によって記述するには，$3n$個の座標x_i $(i=1\sim 3n)$を用いる．しかし，質点の運動が曲面上に束縛されている場合や，剛体のように質点が互いに強く結ばれていて質点間の距離が変わらない場合は，拘束条件がつく．拘束条件は，一般には微分形で与えられるから，それらを1-形式

$$\omega_\alpha = a_{\alpha i}(x, t)dx^i + b_\alpha(x, t)dt = 0 \qquad (\alpha = 1, \cdots, m) \tag{2-1-1}$$

と表そう．ここで，同一項に同じ上付きと下付き添字が現れる場合はその添字につき和をとるものとし，和の記号$\sum$は省略する．また$a(x, t)$は$a(x_1, x_2, \cdots, x_{3n}, t)$の略記である．

ω_αは必ずしも全部独立とは限らないが，そのときは独立なもののみ残し，従属なもの（他のω_αの1次結合で表されるもの）を捨てればよいから，ω_αはすべて独立と仮定する．これらω_αのうち積分可能なものがあれば，積分形で拘束条件を表す方が便利なことが多い．そこで，第1章で述べたPfaff方程式系の積分可能条件で

ある Frobenius の定理を適用しよう．(2-1-1) の ω_α がそのままでは必ずしも Frobenius の定理を満たさないが，適当な 1 次結合

$$\rho_\mu \equiv c_\mu{}^\alpha(x, t)\omega_\alpha = 0 \qquad (\mu = 1, \cdots, m') \tag{2-1-2}$$

をつくり，ρ_μ が

$$d\rho_\mu = \theta_\mu{}^\nu \wedge \rho_\nu \tag{2-1-3}$$

を満たすようにする．ρ_μ の数 m' は ω_α の数 m と同じとは限らず，一般には $m' \leq m$ である．$m' < m$ の場合には $m - m'$ 個の ω_β が ρ_μ とは独立に残っている．ここで注意すべきことは，m' は関数 $c_\mu{}^\alpha$ の選び方により変わりうるから，m' が最大になるように ρ_μ の組をつくることである．

このような Pfaff 方程式系 (2-1-2) は完全積分可能であって

$$dg_\mu = 0$$

と同値であるから，積分

$$g_\mu(x, t) = c_\mu = \text{一定} \qquad (\mu = 1, \cdots, m') \tag{2-1-4}$$

が存在する．これが拘束条件の積分形である．積分 g_μ の数 m' が m 以下の場合は，積分不可能な拘束条件

$$\omega_\sigma = a_{\sigma i}(x, t)dx^i + b_\sigma(x, t)dt = 0 \qquad (\sigma = 1, \cdots, m - m') \tag{2-1-5}$$

があり，(2-1-4) と (2-1-5) を合わせてこの系の拘束条件となる．この力学系の自由度は $3n - m$ である．

特にすべての拘束条件が完全積分可能，つまり $m = m'$ の場合，その系をホロノーム系といい，積分不可能な拘束条件のある系を非ホロノーム系という．曲面上に束縛された質点系はホロノーム系である．非ホロノーム系の例はなめらかな平面上を滑らずに転がる球の運動である（例 2-1 参照）．

ホロノーム拘束条件は積分 g_μ で表されるから，一般座標 q^i に変数変換を行い，最後の m' 個の座標を

$$q^{3n-m'+\mu} = g_\mu(x, t) = \text{定数} \tag{2-1-6}$$

としてやると，これら m' 個の変数は定数パラメータであって，力学変数から消し去ることができる．したがって，$3n - m'$ 個の力学変数

$$q^i = \{q^1, q^2, \cdots, q^{3n-m'}\}$$

によってこの力学系は記述できる*)．座標 q^i で表される空間を配位空間 Q と呼ぶ．

---

*) Frobenius の定理は局所的に成り立つものだから，このようにして得られたホロノーム系は厳密には局所的な座標系で記述されるもので，大域的に妥当であるとは限らない．

以後，ホロノーム拘束条件は取り除き，一般座標 q^i を用いる．そして，考察の対象を主として非ホロノーム拘束条件のないホロノーム系 $(m=m')$ に限ることにする．

例 2-1 曲面上に束縛された質点

曲面への法線を $\boldsymbol{n}=(n_1, n_2, n_3)$ とすると，運動は $\boldsymbol{n}$ に垂直方向に限定されるから拘束条件は

$$\omega = n_i dx^i = 0. \tag{2-1-7}$$

曲面を表す式を

$$g(x)=c$$

とすれば，法線成分 n_i は

$$n_i = \frac{\partial g}{\partial x^i} \tag{2-1-8}$$

であるから，

$$d\omega = \frac{\partial n_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i = \frac{\partial^2 g}{\partial x^i \partial x^j} dx^j \wedge dx^i = 0$$

よって ω は明らかに積分可能である．

逆に，$d\omega=0$ ならば

$$\frac{\partial n_i}{\partial x^j} - \frac{\partial n_j}{\partial x^i} = 0$$

となり，Stokes の定理によって (2-1-8) を満たす $g(x)$ が存在する．そして，$g(x)=c$ が曲面の方程式である．

例 2-2 平面上を滑らずに回転する球

剛体の運動を記述するのに便利な Euler 角を用いて拘束条件を表す．平面上の球

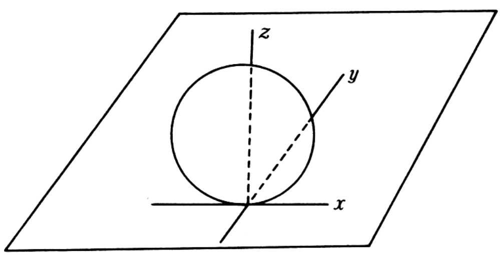


図 2-1

の状態を指定するのに，中心の位置 x, y，球の向きを決める Euler 角 θ, ψ, φ の 5 変数が必要である．半径 a の球が滑らない条件は次の 2 つである．

$$\begin{aligned} \omega_1 &= dx - a(\cos\varphi\, d\theta + \sin\theta \sin\varphi\, d\psi) = 0 \\ \omega_2 &= dy + a(\sin\varphi\, d\theta - \sin\theta\cos\varphi\, d\psi) = 0 \end{aligned} \qquad (2\text{-}1\text{-}9)$$

これら ω_1, ω_2 は Frobenius の条件を満たさないことは次のように証明される．もし積分可能なら

$$d\omega_\mu = \theta_\mu{}^\nu \wedge \omega_\nu \qquad (\mu, \nu = 1, 2) \qquad (2\text{-}1\text{-}10)$$

なる $\theta_\mu{}^\nu$ が存在する．記号を簡略化するために，変数を x, y と θ, φ, ψ に分け，

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &\equiv dx + \rho_1(\theta, \varphi, \psi), \\ \omega_2 &\equiv dy + \rho_2(\theta, \varphi, \psi), \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}1\text{-}11)$$

$$\theta_\mu{}^\nu = a_\mu{}^\nu dx + b_\mu{}^\nu dy + \eta_\mu{}^\nu \qquad (2\text{-}1\text{-}12)$$

とおく，ρ_μ は（2-1-9）で与えられる 1-形式，$\eta_\mu{}^\nu$ は $d\theta$, $d\varphi$, $d\psi$ の 1-形式である．(2-1-11)，(2-1-12）を（2-1-10）に代入する．$d\omega_\mu = d\rho_\mu$ は dx, dy 項をもたないから，(2-1-10）の右辺の $dx \wedge dy$，dx, dy の係数は 0 でなければならない．よって次式を得る．

$$a_\mu{}^2 - b_\mu{}^1 = 0, \qquad (2\text{-}1\text{-}13\,\text{a})$$

$$a_\mu{}^\nu \rho_\nu - \eta_\mu{}^1 = 0, \qquad (2\text{-}1\text{-}13\,\text{b})$$

$$b_\mu{}^\nu \rho_\nu - \eta_\mu{}^2 = 0, \qquad (2\text{-}1\text{-}13\,\text{c})$$

$$d\rho_\mu = \eta_\mu{}^\nu \wedge \rho_\nu. \qquad (2\text{-}1\text{-}13\,\text{d})$$

(2-1-13 b）に ρ_1 を，(2-1-13 c）に ρ_2 を乗じ和をとると

$$\eta_\mu{}^\nu \wedge \rho_\nu = a_\mu{}^\nu \rho_\nu \wedge \rho_1 + b_\mu{}^\nu \rho_\nu \wedge \rho_2. \qquad (2\text{-}1\text{-}14)$$

すべての 1-形式のべき外積は 0 であるから，$\rho_\mu \wedge \rho_\mu = 0$．よって（2-1-14）は（2-1-13 a）により

$$\eta_\mu{}^\nu \wedge \rho_\nu = (a_\mu{}^2 - b_\mu{}^1)\rho_2 \wedge \rho_1 = 0.$$

上式と（2-1-13 d）から $d\rho_\mu = 0$ を得る．しかるに，与えられた ρ_μ は明らかに

$$d\rho_\mu \neq 0.$$

したがって（2-1-10）を満たす $\theta_\mu{}^\nu$ は存在せず，(2-1-9）は積分不可能である．

それゆえ，この力学系は自由度 3 の非ホロノーム系である．

例 2-3

上の問題は ω_μ が 3 つ以上の系に拡張される．N 変数 x^i（$i = 1 \sim N$）に対し，m

個の拘束条件

$$\omega_\alpha = a_{\alpha i}(x)dx^i \equiv a_{\alpha\beta}dx^\beta + a_{\alpha\mu}dx^\mu = 0 \qquad (2\text{-}1\text{-}15)$$

$$(\alpha, \beta = 1 \sim m, \ \mu = m+1 \sim N)$$

があるとする．行列 $a_{\alpha\beta}$ の逆行列を (2-1-15) に乗ずると，これと同値な Pfaff 形式 Ω^α を得る；

$$\Omega^\alpha = dx^\alpha + A^\alpha{}_\mu dx^\mu \equiv dx^\alpha + \rho^\alpha. \qquad (2\text{-}1\text{-}16)$$

もし $A^\alpha{}_\mu$ したがって ρ^α が x^α $(\alpha = 1 \sim m)$ に依存しなければ，(2-1-16) は $d\rho^\alpha \neq 0$ のとき積分不可能である．なぜならば

$$d\Omega^\alpha = \theta^\alpha{}_\beta \wedge \Omega^\beta, \quad \theta^\alpha{}_\beta = b^\alpha{}_{\beta\gamma} dx^\gamma + \eta^\alpha{}_\beta$$

$\eta^\alpha{}_\beta$ は dx^μ のみの 1-形式，とおき，例 2-2 と同様の方法で

$$\left.\begin{array}{l} b^\alpha{}_{\beta\gamma} - b^\alpha{}_{\gamma\beta} = 0, \quad b^\alpha{}_{\beta\gamma}\rho^\gamma + \eta^\alpha{}_\beta = 0, \\ d\rho^\alpha = \eta^\alpha{}_\beta \wedge \rho^\beta \end{array}\right\} \qquad (2\text{-}1\text{-}17)$$

を得る．(2-1-17) の第 2 式に ρ^β を乗じ，第 1 式を用いると

$$d\rho^\alpha = 0 \qquad (\alpha = 1 \sim m) \qquad (2\text{-}1\text{-}18)$$

でなければならない．よって，(2-1-18) が満たされない限り (2-1-16) は完全積分可能でない．いくつかの ρ^α が閉じているとき，それに対応する Ω^α も閉じているから，Poincare の補題により，その Ω^α は積分可能である．

§ 2-2 Hamilton の原理

解析力学の基礎となる原理に仮想仕事の原理と最小作用の原理がよく知られている．Maupertuis が最初に提唱した最小作用の原理は，作用積分に対してエネルギーを一定に保つ条件のもとで質点の経路を変える変分を行い，運動経路を決定する方法であるが，その後，Hamilton が今日用いられているような便利な形式に発展させた．Hamilton の原理も，広い意味で最小作用の原理と現在では呼ばれている．この節では，あとの章の準備のために Hamilton の原理を簡単に述べることにする*)．

Hamilton の原理は，運動を大域的にとらえ，質点の運動経路上で時刻 t_1 における一点 $P_1(q_1{}^i, t_1)$ から時刻 t_2 における他の点 $P_2(q_2{}^i, t_2)$ までの作用積分を考える．その経路をわずか変化させた場合の作用積分の変分が停留値をとることから，質点の運動を決定する原理である．

---

*) 仮想仕事と Maupertuis の原理は本書では用いないので省略する．

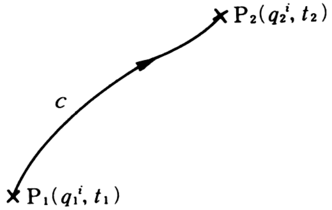


図 2-2

いま，自由度Nの質点系が，$P_1(q_1{}^i, t_1)$ から $P_2(q_2{}^i, t_2)$ へ運動したとする．この間の質点に作用する力のした仕事率をWとし，質点系の運動エネルギーの和をTとする．作用積分を

$$J_c=\int_{t_1(c)}^{t_2}(T+W)dt \tag{2-2-1}$$

によって定義する．Tは $q^i, \dot{q}^i\equiv dq^i/dt$ の関数 $T(q,\dot{q})$ であるが，Wは簡単のため q^i のみによるとする．速度依存力の場合にはWも $\dot{q}^i$ による．そのときも同じようにやれて，以下の話は本質的には変わらない．この作用積分は 1 次元運動以外には一般に経路 c に依存するので，経路を指定する意味で(c)を付記した．

運動経路 c は運動方程式の解として初期条件あるいは境界条件と時間の関数で表される；

$$c：q^i=q^i(t,s_0) \qquad (i=1,\cdots,N). \tag{2-2-2}$$

ここに s_0 は初期条件をまとめて記したものである．関数形 $q^i(t,s_0)$ が決まれば c は決まる．作用積分 J は端点 P_1, P_2 と関数形 q^i によって指定されるので，J_c の代わりに $J[q]$ と記して，関数形 q^i の依存性を明示することにする．このように被積分関数の関数形に依存する量を汎関数と呼ぶ．

端点 P_1, P_2 を固定したまま経路を c から微小だけ変えた場合の経路を c' とし，対応する座標 q' を

$$q'^i(t)=q^i(t)+\delta q^i(t) \tag{2-2-3}$$

とする．ただし

$$\delta q^i(t_1)=\delta q^i(t_2)=0. \tag{2-2-4}$$

このとき $J[q]$ の変化は

$$\delta J[q]=\int_{t_1}^{t_2}\delta(T+W)dt$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\delta\dot{q}^i+\frac{\partial T}{\partial q^i}\delta q^i+K_i\delta q^i\right)dt. \tag{2-2-5}$$

ただし，K_i は一般化力の成分であって，$\delta W\equiv K_i\delta q^i$ である．また

$$\delta\dot{q}^i=\dot{q}'^i(t)-\dot{q}^i(t)=\frac{d}{dt}\delta q^i(t) \tag{2-2-6}$$

であるから，(2-2-5) の第1項を部分積分し，(2-2-4) を用いると

$$\delta J[q]=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{\partial T}{\partial q^i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\right)+K_i\right\}\delta q^i dt. \tag{2-2-7}$$

Hamilton の原理は実現される運動経路 c に対して

$$\delta J[q_c]=0 \tag{2-2-8}$$

を要請するものである．つまり，「作用積分 $J[q]$ は質点系の運動が実現される経路 c の上で停留値をとる」ということができる．

系がホロノーム系であるならば，拘束条件は残っていないので δq^i はすべて独立であるから，(2-2-7) と (2-2-8) とからただちに各 δq^i の{　}の中を0とおいて運動方程式が得られる．非ホロノーム系なら拘束条件 (2-1-5) があるので，δq^i は独立にはとれない．そこで Lagrange の未定係数法を用いる．変分は時間を止めた仮想変位であるから，(2-1-5) で dt を0とした

$$a_{\sigma i}(x,t)\delta q^i=0 \tag{2-2-9}$$

を用いるべきである．したがって，未定係数を λ^σ とすると

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q^i}=K_i+\lambda^\sigma a_{\sigma i} \tag{2-2-10}$$

が運動方程式である．$\lambda^\sigma a_{\sigma i}$ は束縛力を表す．

特に，K_i がポテンシャル $U(q)$ から導かれるとき，

$$K_i=-\frac{\partial U}{\partial q^i}. \tag{2-2-11}$$

そこで Lagrange 関数 L を導入して

$$L(q,\dot{q},t)=T-U \tag{2-2-12}$$

とおくと，(2-2-1)，(2-2-7)，(2-2-10) はそれぞれ

$$J[q]=\int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt, \tag{2-2-13}$$

$$\delta J[q]=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\right\}\delta q^i dt=0, \tag{2-2-14}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q^i}=\lambda^\sigma a_{\sigma i} \tag{2-2-15}$$

となる．いうまでもなく，ホロノーム系で拘束条件を消去したLに対しては右辺は0である．この運動方程式は Euler-Lagrange 方程式，あるいは単に Lagrange 方程式と呼ばれる．

これまで Hamilton の原理から Lagrange 方程式を導いたが，逆に，Lagrange 方程式に従う経路に対し作用積分が停留値をとるのは明らかである．

ちなみに，ここで「最小作用の原理」について一言触れておこう．Hamilton の原理を「最小作用の原理」というのは必ずしも正しくない．厳密には作用積分の「停留値原理」とでもいうべきである．その理由は，$J[q]=0$ は極大，極小条件を与えるとは限らない．変分をパラメータ表示したとき，鞍点のようにある方向の変分に対しては極小となっても他の方向の変分では極大となることがあるからである．また，もうひとつの理由は，たとえば，球面上の運動において，P_1, P_2 を結ぶ大円の弧に沿って運動が実現されるとき，大円の弧は短いもの c_1 と長いもの c_2 の 2 つある．c_1 上で $J[q]$ は最小であるが，c_2 上では最大でも最小でもない停留点である．したがって，作用積分を大域的でなく，局所的に限定したときのみ「最小」になりうる．

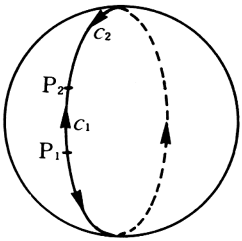


図 2-3

§ 2-3 基 本 1-形 式

前節での Hamilton の原理では，運動方程式を導くにあたって，両端を固定した変分を行ったが，両端を固定せずに動かす拡張された変分を考えることもできる．すると Lagrange 方程式以外の力学的情報が得られる．

作用積分の端点の時刻 t_1, t_2 を動かし，しかも t_1, t_2 での変分 $\delta q^i(t_1)$ と $\delta q^i(t_2)$ をも 0 としない一般的変分を考えよう．両端の近くで q^i の変分 δq^i は q^i の関数形自身の変分 $\delta^* q^i$ と t の変分からの寄与の和となる；

$$\delta q^i(t)=\delta^* q^i(t)+\dot{q}^i(t)\delta t \qquad (i=1, \cdots, N). \tag{2-3-1}$$

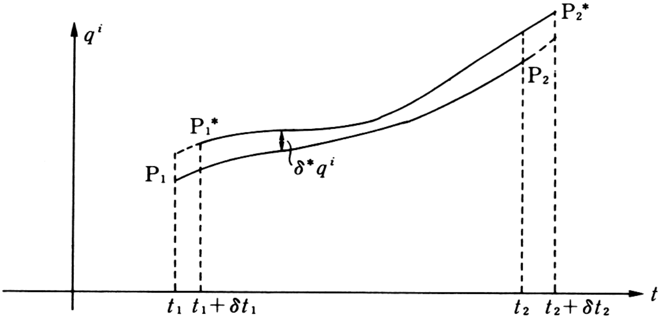


図 2-4

ただし，P_1, P_2 の近傍以外の中間領域では q^i の変分は $\delta^* q^i(t)$ のみとする．この変分に対して $J[q]$ の変化は，

$$\delta J[q]=\int_{t_1+\delta t_1}^{t_2+\delta t_2} dt\, L(q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q}, t)-\int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q, \dot{q}, t). \tag{2-3-2}$$

これを変形して 2 次以上の微小量を無視すると

$$\delta J[q]=\left\{\int_{t_1+\delta t_1}^{t_1}+\int_{t_2}^{t_2+\delta t_2}\right\}L(q, \dot{q}, t)dt+\int_{t_1}^{t_2} dt\{L(q+\delta^* q, \dot{q}+\delta^*\dot{q}, t)-L(q, \dot{q}, t)\}$$

$$=L(q_2, \dot{q}_2, t_2)\delta t_2-L(q_1, \dot{q}_1, t_1)\delta t_1+\delta^*\int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt \tag{2-3-3}$$

となる．右辺第 1，第 2 項目は積分領域が微小であるので，L の変数 $q^i+\delta q^i$ などを q^i とした．前節の δ がここでの δ^* にあたる．したがって，この式の最終項は前節と同様に計算される．$\delta^* q^i(t)$ は時間 t を止めた変分であるから

$$\delta^*\dot{q}^i(t)=\frac{d}{dt}\,\delta^* q^i(t) \tag{2-3-4}$$

が成り立つ．よって，部分積分ができるので（2-3-3）は

$$\delta J[q]=\left[L(q,\dot{q},t)\delta t+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\,\delta^* q^i\right]_{t_1}^{t_2}$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}dt\left\{\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\right\}\delta^* q^i \tag{2-3-5}$$

となる．これが，拡張された変分の一般式である．

上式の第 2 項は Lagrange 方程式を用いると消えるので，運動の経路上では

$$\delta J[q]_c=\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\,\delta q^i-\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\,\dot{q}^i-L\right)\delta t\right]_{t_1}^{t_2} \tag{2-3-6}$$

が成り立つ．ただし，上の式では（2-3-1）を用いた．

（2-3-6）は次のことを示している．経路 c 上での作用積分の変分は積分の中間領域に依存せず，境界値のみで決まる．つまり，$\delta J[q]_c$ が積分可能であることを示す．したがって，作用積分の汎関数変分が積分可能であるための必要十分条件は，その積分路上で Lagrange 方程式が成り立つことである．

ここで

$$\boldsymbol{\theta}(t)\equiv\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\,\delta q^i(t)-\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\,\dot{q}^i-L\right)\delta t \tag{2-3-7}$$

とおくと

$$\delta J[q]_c=\boldsymbol{\theta}(t_2)-\boldsymbol{\theta}(t_1) \tag{2-3-8}$$

と書ける．この $\boldsymbol{\theta}$ は以後の理論できわめて重要な役割を果たす変分である．

正準形式は第 4 章で詳しく論ずるが，よく知られているように，正準理論では一般化運動量 p_i は（2-3-6）の δq^i の係数で，

$$p_i=\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}^i} \tag{2-3-9}$$

によって与えられ，系のエネルギーを表す Hamilton 関数Hは δt の係数

$$H(q,p)=p_i\dot{q}^i-L \tag{2-3-10}$$

で定義される．Hは正準変数 q^i, p_i の関数として定義されるが，それを $q^i, \dot{q}^i$ で表したものが $\boldsymbol{\theta}$ の δt の係数である．そこで

$$\boldsymbol{\theta}=p_i(q,\dot{q})\delta q^i-E(q,\dot{q})\delta t \tag{2-3-11}$$

と書くことにする．ただし $E(q,\dot{q})=p_i(q,\dot{q})\dot{q}^i-L(q,\dot{q})$．$\boldsymbol{\theta}$ は Lagrange 形式での量を意味する．Hamilton の正準形式でのこれに対応する量は

$${}_*\boldsymbol{\theta}=p_i\delta q^i-H(q,p)\delta t \qquad (2\text{-}3\text{-}12)^{*)}$$

となる．ここで p_i と q^i とは独立変数である．

$\boldsymbol{\theta}, {}_*\boldsymbol{\theta}$ の中の $\delta q^i, \delta t$ を微分 dq^i, dt で置き換えた Pfaff 形式を，改めてそれぞれ

$$\boldsymbol{\Omega}\equiv p_i(q,\dot{q})dq^i-E(q,\dot{q})dt \qquad (2\text{-}3\text{-}13)$$

$${}_*\boldsymbol{\Omega}\equiv p_i dq^i-H(q,p)dt \qquad (2\text{-}3\text{-}14)$$

と定義しよう**)．$\boldsymbol{\Omega}$, ${}_*\boldsymbol{\Omega}$ は $\boldsymbol{\theta}, {}_*\boldsymbol{\theta}$ とともに基本的なものであるから，$\boldsymbol{\Omega}$，${}_*\boldsymbol{\Omega}$ を**基本 1-形式**と呼ぶことにする***)．

次章で示すように $\boldsymbol{\Omega}$ の外微分は Lagrange 方程式を与え，Lagrange 方程式の新しい見方の基礎となる．それに対応して，${}_*\boldsymbol{\Omega}$ は正準運動方程式を与え，Hamilton の原理と同値な Cartan の原理へと導くものである（§ 4-3 参照）．

§ 2-4　作用積分の不変性と保存則

作用積分 $J[q]$ は任意の変分 δq^i と δt に対し，運動の経路上で（2-3-8）を満たす．t_1, t_2 は任意にとれるから，このことは，$\delta J[q]_c$ が 0 ならば $\boldsymbol{\theta}(t)$ が時間によらず一定であること，つまり $\boldsymbol{\theta}(t)$ は運動の保存量であることを意味する．これはまさに，作用積分を不変にする連続変換に対してひとつの保存則があるという Noether の定理である．したがって，この定理は変分法の重要な応用例である．

運動方程式を積分してエネルギー，運動量などの保存則が得られることはよく知られている．どのような保存量と保存則とが存在するかは，主としてその力学系を規定する運動方程式の性質，特にその不変性と関連している．ところが，Lagrange 関数 L が存在するときには，系の力学的性質は L によって決まるから，保存則は L の不変性（対称性）と深くかかわっている．したがって，運動方程式を解かなくとも L の不変性から保存則を見出すことができる．それを一般的に示したのが Noether の定理である．

Noether の定理の説明に入る．まず次の微小変換を考えよう．恒等変換から連続につながる有限変換は微小変換の積み重ねで得られるので，それで十分である．

---

*）　*印は位相空間における量であることを示す．

**）　本書では変換の変分を δ で，微分を d で表すことにする．

***）　$\boldsymbol{\Omega}$，${}_*\boldsymbol{\Omega}$ は Poincaré-Cartan の不変形式とも呼ばれる．

$$\left.\begin{aligned} q^i(t) &\to q'^i(t') = q^i(t) + \delta q^i(t, \epsilon) \\ t &\to t' = t + \delta t(t, \epsilon) \end{aligned}\right\} \tag{2-4-1}$$

ϵ は変換の微小パラメータであって，$\delta q^i(t, 0) = \delta t(t, 0) = 0$ とする．前節での変分は両端付近のみで時間を変化させ，中間領域では q^i の関数形のみ変え，時間は動かさなかった．Noether の定理は，すべての時刻で $q^i(t)$ と t を（2-4-1）のように変化させてもよいので，改めて $\delta J[q]$ を計算しよう．

作用積分 $J[q, t]$ の変分を ϵ の 1 次，つまり $\delta q^i, \delta t$ の 1 次まで求める．この変分では t も変化するので，J は q^i, t の汎関数であることを明示する．上の変換によって $J[q, t]$ は

$$J[q', t'] = \int_{t_1'}^{t_2'} L(q'(t'), \dot{q}'(t'), t') dt' \equiv \int_{t_1'}^{t_2'} L' dt' \tag{2-4-2}$$

に変わるから

$$\delta J[q, t] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(L' \frac{dt'}{dt} - L \right) \tag{2-4-3}$$

となる．（2-4-1）より得られる

$$\frac{dt'}{dt} = 1 + \frac{d}{dt} \delta t \tag{2-4-4}$$

を上式に代入して次式を得る．

$$\delta J[q, t] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ L' - L + L \frac{d\delta t}{dt} \right\}. \tag{2-4-5}$$

次に，この式の中の $L' = L(q'(t'), \dot{q}'(t'), t')$ を $\delta q^i, \delta \dot{q}^i, \delta t$ で展開するのであるが，（2-4-1）の δq^i は t の異なる時刻における量の差であるから，

$$\delta \dot{q}^i \neq \frac{d}{dt} \delta q^i.$$

そこで t を固定した変分 $\delta^* q^i$ を前節と同様に

$$\delta^* q^i(t) = q'^i(t) - q^i(t) \tag{2-4-6}$$

によって定義すると

$$\delta^* \dot{q}^i(t) = \frac{d}{dt} \delta q^i(t) \tag{2-4-7}$$

が成り立つ．すると

$$\delta q^i(t) = q'^i(t') - q^i(t') + q^i(t') - q^i(t) = \delta^* q^i(t') + \dot{q}^i(t) \delta t$$

$$=\delta^* q^i(t)+\dot{q}^i\delta t. \tag{2-4-8}$$

また (2-4-4), (2-4-7), (2-4-8) を用いて

$$\delta\dot{q}^i(t)=\dot{q}'^i(t')-\dot{q}^i(t)=\left(1-\frac{d}{dt}\delta t\right)\frac{dq'^i(t')}{dt}-\dot{q}^i(t)$$

$$=\frac{d}{dt}\{q'^i(t')-q^i(t)\}-\frac{d\delta t}{dt}\frac{dq'^i(t')}{dt}$$

$$=\frac{d}{dt}\{\delta^* q^i(t)+\dot{q}^i(t)\delta t\}-\dot{q}^i(t)\frac{d\delta t}{dt}$$

結局

$$\delta\dot{q}^i(t)=\delta^*\dot{q}^i(t)+\ddot{q}^i(t)\delta t \tag{2-4-9}$$

を得る. (2-4-8), (2-4-9) を使って L' を展開すると

$$L'=L+\frac{\partial L}{\partial q^i}(\delta^* q^i+\dot{q}^i\delta t)+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(\delta^*\dot{q}^i+\ddot{q}^i\delta t)+\frac{\partial L}{\partial t}\delta t$$

$$=L+\frac{\partial L}{\partial q^i}\delta^* q^i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta^*\dot{q}^i+\frac{dL}{dt}\delta t \tag{2-4-10}$$

こうして (2-4-5) と (2-4-10) から

$$\delta J[q,t]=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\left(\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\delta^* q^i+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta^* q^i+L\delta t\right)\right\}dt \tag{2-4-11}$$

が得られる. これは任意の微小変分 (2-4-1) に対して成り立つ恒等式である.

そこで, もし $J[q,t]$ が任意の領域 $[t_1, t_2]$ において変換 (2-4-1) のもとで不変であるならば, $\delta J[q,t]=0$. したがって, Lagrange 方程式のもとで次の保存則が成立する.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta^* q^i+L\delta t\right)=\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta q^i-\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i-L\right)\delta t\right\}=\frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt}=0 \tag{2-4-12}$$

こうして保存量 $\boldsymbol{\theta}$ を得る.

Noether の定理は $J[q,t]$ が不変である必要はなく,

$$\delta J[q,t]=\int_{t_1}^{t_2}\frac{dF(q,\epsilon)}{dt}dt=F(q(t_2),\epsilon)-F(q(t_1),\epsilon) \tag{2-4-13}$$

となるときにも拡張できる. (2-4-13) の場合には, 運動方程式は変換の前後で同じである. なぜならば, Lagrange 方程式を導く変分は積分の両端を固定して行うか

ら，この右辺は変分を受けず，Lagrange 方程式に寄与しないからである*)．すると(2-4-11) と (2-4-13) とから次の保存則が導かれる．

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\theta}-F)=\frac{d}{dt}(p_i\delta q^i-E\delta t-F)=0 \qquad (2\text{-}4\text{-}14)$$

これが拡張された Noether の定理である．

時間を変えずに q^i のみ変換する場合，(2-4-13) の条件は L が

$$L \to L'=L(q,\dot{q},t)+\frac{dF(q,\epsilon)}{dt} \qquad (2\text{-}4\text{-}15)$$

となる条件に単純化される．(2-4-14)を導くにあたって留意すべきことは，変換の前後で Lagrange の運動方程式が変わらないということである．運動方程式が変わってしまうのでは運動の保存則は意味を失う．

以上の議論は J を変えない変換というだけで，まだ抽象的であるが，δq^i, δt がいかなる変分であるかによって保存量が決まるわけである．そこで，r 個の独立なパラメータ ϵ^α $(\alpha=1,\cdots,r)$ によって表される変換

$$\begin{aligned}\delta q^i&=\epsilon^\alpha\varphi_\alpha{}^i(q,\dot{q},t)\\ \delta t&=\epsilon^\alpha\tau_\alpha(t)\end{aligned} \qquad (2\text{-}4\text{-}16)$$

によって $J[q,t]$ が t の全微分を除いて不変であるならば，r 個の保存量

$$p_i\varphi_\alpha{}^i-E\tau_\alpha-f_\alpha=\text{一定} \qquad (\alpha=1,\cdots,r) \qquad (2\text{-}4\text{-}17)$$

を得る．ここに $F=\epsilon^\alpha f_\alpha$ とおいた．この $\varphi_\alpha{}^i$, τ_α は任意ではなく，L が与えられれば，それによって具体的に定まる関数である．

作用積分を不変にする 1 つの連続変換に対して 1 つの保存量の存在が示せたが，この逆，つまり 1 つの保存則があればそれに付随した変換に対し作用関数が不変となるかという問題が生ずる．この答は，条件つきで成り立つということである．詳細は第 9 章 §9-1を参照されたい．

次に Noether の定理の簡単な例を示す．

例 2-4　エネルギー・運動量保存則

L が時間 t に陽に依存しなければ，時間の一斉推進変換

$$t \to t'=t+\epsilon$$

---

*) F が $\dot{q}^i$ による場合は L' は $\ddot{q}^i$ を含む．そのときは δq^i のみでなく，$\delta\dot{q}^i$ も両端で 0 とすべきである．

に対してJが不変である．このとき $\tau=1$, $\varphi^i=0$, $f_\alpha=0$ であるから

$$E=\text{一定} \qquad (\text{エネルギー保存則})$$

n 質点系のLが直線直交座標系において

$$L=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2}m_j\dot{\boldsymbol{r}}_j^2-V(|\boldsymbol{r}_k-\boldsymbol{r}_j|) \qquad (j,k=1,\cdots,n) \tag{2-4-18}$$

のとき，

$$\boldsymbol{r}_j \to \boldsymbol{r}_j'=\boldsymbol{r}_j+\boldsymbol{\epsilon}$$

に対して不変である．$\tau_\alpha=0$, $\delta\boldsymbol{r}_j=\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\varphi}_j=1)$．よって

$$\sum_j \boldsymbol{p}_j=\text{一定} \qquad (\text{運動量保存則})$$

また，Lがある特定の座標変数 q^μ を含まなければ，q^μ を循環座標という．このとき

$$q^\mu \to q'^\mu=q^\mu+\epsilon, \quad \dot{q}'^\mu=\dot{q}^\mu$$

に対しLは不変である．$\varphi_\mu{}^i=\delta_\mu{}^i$, $\tau=0$.

$$\therefore \quad p_\mu=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^\mu}=\text{一定} \tag{2-4-19}$$

循環座標に共役な運動量は保存する．

例 2-5 Galilei 変換

前の例の (2-4-18) のLから導かれる Lagrange 方程式は，Galilei 変換で不変であることはよく知られている．慣性系間の相対速度 $\boldsymbol{v}$ を微小速度 $\boldsymbol{\epsilon}$ で表すと，Galilei 変換は

$$\delta\boldsymbol{r}_j=\boldsymbol{\epsilon}t, \quad \delta t=0$$

この変換に対して

$$\delta L=L'-L=\sum_j m_j\boldsymbol{\epsilon}\dot{\boldsymbol{r}}_j\ ;\ F=\sum m_j\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{r}_j \tag{2-4-20}$$

となる．よって (2-4-17) により

$$\sum_j m_j(\dot{\boldsymbol{r}}_j t-\boldsymbol{r}_j)=\text{一定} \tag{2-4-21}$$

質量中心の座標 $\boldsymbol{R}=\sum_j m_j\boldsymbol{r}_j/\sum m_j$ を用いると，上式は，質量中心の等速運動を表す式

$$MR-Pt=一定$$

となる．

§ 2-5　Noether の第 2 定理

力学変数 q^i と時間 t の変換によって δJ が (2-4-13) の形に書けるとき Lagrange 方程式に変わりはない．したがって，変換前後の q^i, t と q'^i, t' とは同一の運動方程式の解である．このことは，ある特別な場合には力学変数が一義的に決まらない可能性を示唆している．しかし，運動方程式がN個（自由度）とも独立であって，積分可能であれば，その解は初期条件によって一義的に決まってしまう．したがって，前節の変換は座標変換の自由度に対応するものであって，運動経路そのものの任意性ではない．変換（2-4-16）の $\varphi_\alpha{}^i, \tau_\alpha$ は任意ではなく，Lによって規定されていて，任意に変えうるのは定数パラメータ ϵ^α のみである．

だが，ϵ^α を単なるパラメータでなく，時間の任意関数に拡張し，(2-4-16)の代わりに

$$\begin{aligned}\delta q^i(t)&=\epsilon^\alpha(t)\varphi_\alpha{}^i(q,\dot{q},t)+\dot{\epsilon}^\alpha(t)\psi_\alpha{}^i(q,\dot{q},t)\\ \delta t&=\epsilon^\alpha(t)\tau_\alpha(q,\dot{q},t)\qquad(\alpha=1,\cdots,r)\end{aligned}\tag{2-5-1}$$

としたとき，作用積分の変化が

$$\delta J[q,t]=\int_{t_1}^{t_2}dt\,\frac{d}{dt}\{\epsilon^\alpha\xi_\alpha(q,\dot{q},t)+\dot{\epsilon}^\alpha\eta_\alpha(q,\dot{q},t)\}\tag{2-5-2}$$

となる場合を考えよう*)．今度は任意関数 $\epsilon^\alpha(t)$ が変換の中に入っているから，保存則が得られるばかりでなく，Lagrange 方程式の間にも関係がつくのである．したがって，N個の運動方程式は独立ではなくなり，その解 $q^i(t)$ は一義的に決まらない．そのような変換をゲージ変換といい，その系をゲージ不変な系という．

作用積分がこのような性質をもつときに，(2-4-11）と（2-5-2）からいくつかの関係式が得られる．(2-5-1）の表式を（2-4-11）に代入すると次式を得る．

$$\int_{t_1}^{t_2}dt\left[\epsilon^\alpha\left\{[L]_i(\varphi_\alpha{}^i-\dot{q}^i\tau_\alpha)-\frac{d}{dt}(\psi_\alpha{}^i[L]_i)\right\}\right.$$
$$\left.+\frac{d}{dt}\{\epsilon^\alpha\psi_\alpha{}^i[L]_i+p_i\delta q^i-E\delta t-\epsilon^\alpha\xi_\alpha-\dot{\epsilon}^\alpha\eta_\alpha\}\right]\equiv 0\tag{2-5-3}$$

---

*）（2-5-1)，(2-5-2）において $\epsilon_\alpha, \dot{\epsilon}_\alpha$ までとったが，一般にはより高次の $\ddot{\epsilon}_\alpha$ などを考慮しなければならない場合もあるが，ここでの議論はこれで十分である．詳しい考察は第 9 章の拘束系の力学のところで行う．

ここに $[L]_i$ は L より得られる Lagrange 方程式の i 成分である；

$$[L]_i \equiv \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \tag{2-5-4}$$

以後これを L の Euler 微分ということにする．

ϵ^α は任意関数であるから，まず境界のところで

$$\epsilon^\alpha(t_1) = \epsilon^\alpha(t_2) = \dot{\epsilon}^\alpha(t_1) = \dot{\epsilon}^\alpha(t_2) = 0$$

となるように選ぶことができる．すると (2-5-3) の第2項を積分すると消える．ϵ^α は t_1, t_2 以外のところではまだ任意であるから，第1項の ϵ^α の因子はすべての α について恒等的に0でなければならない．よって

$$[L]_i(\varphi_\alpha{}^i - \dot{q}^i \tau_\alpha) - \frac{d}{dt}(\psi_\alpha{}^i [L]_i) \equiv 0 \tag{2-5-5}$$

再び (2-5-3) に戻って，(2-5-5) を使うと，第1項は落ちる．ここで改めて $\epsilon^\alpha(t)$ を t_1, t_2 でも任意関数とすることができる．すると，t_1, t_2 は任意だから，時間微分の{　}の中は消えねばならない．

$$[L]_i \epsilon^\alpha \psi_\alpha{}^i + p_i(\epsilon^\alpha \varphi_\alpha{}^i + \dot{\epsilon}^\alpha \psi_\alpha{}^i) - \epsilon^\alpha(\tau_\alpha E + \xi_\alpha) - \dot{\epsilon}^\alpha \eta_\alpha \equiv 0$$

この式で，ϵ^α と $\dot{\epsilon}^\alpha$ は独立にとりうるので，結局

$$p_i \varphi_\alpha{}^i - E\tau_\alpha - \xi_\alpha + [L]_i \psi_\alpha{}^i \equiv 0 \tag{2-5-6}$$

$$p_i \psi_\alpha{}^i - \eta_\alpha \equiv 0 \tag{2-5-7}$$

を得る．これらが Noether の第2定理である．

(2-5-5) は N 個の Lagrange 方程式の間に関係があることを示す式である．(2-5-6) において，$[L]_i = 0$ とおくと

$$p_i \varphi_\alpha{}^i - E\tau_\alpha - \xi_\alpha = 0 \tag{2-5-8}$$

なる条件式を得るが，これは運動方程式のもとで成立すべき拘束条件である．これに対して (2-5-7) は，運動方程式にかかわりなく，L の性質のみから導かれる拘束条件である．後者は1次拘束条件，前者は2次拘束条件と呼ばれるもので，第8，第9章のゲージ理論において重要な役割をする．

(2-5-6) は $[L]_i$ の中に $\ddot{q}_i$ を含むが，他の因子には $\ddot{q}_i$ は入っていないから，$\ddot{q}_i$ は高々1次でしか現れない．よって，$\ddot{q}_i$ の係数は恒等的に消えねばならない；

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \psi_\alpha{}^i \equiv A_{ij}(q, \dot{q}, t) \psi_\alpha{}^i(q, \dot{q}, t) \equiv 0 \tag{2-5-9}$$

上式で定義された A_{ij} は Hessian 行列と呼ばれる．この式は $\psi_\alpha{}^i$ がすべて0でなけ

れば，A_{ij} は最高 r 個のゼロ固有値をもつことを示している．もしある α に対して $\psi_\alpha{}^i$ がすべて 0 ならば，(2-5-5) からその α に対して

$$A_{ij}(\varphi_\alpha{}^j-\tau_\alpha\dot{q}^i)\equiv 0 \qquad (2\text{-}5\text{-}10)$$

を得るから*)，いずれにしても両方合わせて A_{ij} は r 個のゼロ固有値とゼロベクトルをもつ．したがって A_{ij} の階数は

$$\mathrm{rank}(A_{ij})=N-r \qquad (2\text{-}5\text{-}11)$$

である．このように，任意関数 $\epsilon^a(t)$ を含むゲージ変換に対して作用積分が(2-5-2)のように変化するとき，Hessian 行列 A_{ij} は正則でない．そのとき，Lagrange 方程式は $N-r$ 個のみ独立となり，拘束条件が現れる．また

$$A_{ij}=\frac{\partial p_i(q,\dot{q})}{\partial\dot{q}^j} \qquad (2\text{-}5\text{-}12)$$

であるから，

$$p_i=\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial\dot{q}^i} \qquad (2\text{-}5\text{-}13)$$

は $\dot{q}^j$ について独立な関数でなくなる．すると q^i, p_i の間に r 個の関係式が存在することになる．その関係式は p_i を $q^j, \dot{q}^j$ で表し，$q^i, \dot{q}^i$ の関係式と見ると恒等式となる．(2-5-7) がそれに対応する．A_{ij} が非正則であるために，(2-5-13) は $\dot{q}^i$ について逆に解くことができない．これがゲージ理論の特徴である．

ホロノーム系においても，A_{ij} が正則でなければ，また拘束条件が現れる．§2-1 で述べた拘束条件は，L が与えられたときその系に外から課した拘束条件であった．それに対して，ここで現れた拘束条件は，L が非正則な A_{ij} をもつために内から現れたものであるから，内的拘束条件である．

例 2-6　簡単なゲージ不変な系

$$L=\frac{1}{2}g_{ij}(q)\dot{q}^i\dot{q}^j-V(q) \qquad (i,j=1,\cdots,N), \qquad (2\text{-}5\text{-}14)$$

$$\det(A_{ij})=\det(g_{ij})=0, \quad \mathrm{rank}(g_{ij})=N-r$$

で与えられる系を考える．このモデル Lagrange 関数はゲージ変換に関して本質的には電磁場や Yang-Mills 場と類似の性質を有する．

このLは変換

*） $\varphi_\alpha{}^j-\tau_\alpha\dot{q}^i\not\equiv 0$ とする．

$$\delta q^i = \epsilon^\alpha(t)\varphi_\alpha{}^i(q), \quad \delta t = 0 \tag{2-5-15}$$

に対して次の条件のもとで不変である．$\varphi_\alpha{}^i$ が g_{ij} のゼロ固有値ベクトル

$$g_{ij}\varphi_\alpha{}^j = 0 \tag{2-5-16 a}$$

で，かつ

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\varphi_\alpha{}^k + g_{jk}\frac{\partial \varphi_\alpha{}^k}{\partial q^i} + g_{ki}\frac{\partial \varphi_\alpha{}^k}{\partial q^j} = 0, \tag{2-5-16 b}$$

$$\frac{\partial V}{\partial q^i}\varphi_\alpha{}^i = 0 \tag{2-5-16 c}$$

を満たすとする*)．

実際これ等の条件が導かれることを以下で示す．変換（2-5-15）により，L の変分は

$$\begin{aligned}
\delta L &= \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\dot{q}^i\dot{q}^j\delta q^k + g_{ij}\dot{q}^i\delta\dot{q}^j - \frac{\partial V}{\partial q^k}\delta q^k \\
&= \left(\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\dot{q}^i\dot{q}^j - \frac{\partial V}{\partial q^k}\right)\varepsilon^\alpha\varphi_\alpha{}^k + g_{ij}\dot{q}^i\left(\dot{\varepsilon}^\alpha\varphi_\alpha{}^j + \varepsilon^\alpha\frac{\partial\varphi_\alpha{}^j}{\partial q^k}\dot{q}^k\right) \qquad (2\text{-}5\text{-}17) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\varphi_\alpha{}^k + 2g_{ik}\frac{\partial\varphi_\alpha{}^k}{\partial q^j}\right)\dot{q}^i\dot{q}^j\varepsilon^\alpha - \frac{\partial V}{\partial q^k}\varphi_\alpha{}^k\varepsilon^\alpha + g_{ij}\dot{q}^i\varphi_\alpha{}^j\dot{\varepsilon}^\alpha
\end{aligned}$$

$\delta L=0$ なるためには，任意関数 ε^α と $\dot{\varepsilon}^\alpha$ の係数がそれぞれ 0 でなければならないから

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\varphi_\alpha{}^k + g_{ik}\frac{\partial\varphi_\alpha{}^k}{\partial q^j} + g_{jk}\frac{\partial\varphi_\alpha{}^k}{\partial q^i}\right)\dot{q}^i\dot{q}^j - \frac{\partial V}{\partial q^k}\varphi_\alpha{}^k = 0 \tag{2-5-18a}$$

および

$$g_{ij}\varphi_\alpha{}^j\dot{q}^i = 0 \tag{2-5-18b}$$

しかし V には $\dot{q}^i$ 依存性はないので，(2-5-18 a) は分離し，(2-5-16 b, c) をえる．また (2-5-18 b) から (2-5-16 a) が導かれる．

---

*) g_{ij} が非正則のために逆行列 g^{ij} が存在しないが，g_{ij} が正則のとき，(2-5-16) は g_{ij} を計量テンソルとする共変微分を使って，Killing 方程式になり，$\varphi_\alpha{}^i$ は Killing ベクトルと呼ばれるものである．

第3章　運動方程式とその生成系

§ 3-1　Lagrange 方程式の新しい見方

Lagrange 方程式は，一般座標 q^i に対する時間について2階微分方程式である．したがって，初期値 q^i_0 と $\dot{q}^i_0$ の両方を指定してはじめて運動が一意的に決定される．すると，力学系の状態を指定するのは q^i と $\dot{q}^i$ であるといえるから，q^i と $\dot{q}^i$ を座標とする空間を考えると都合がよい．このような $2N$ 次元空間を状態空間，あるいは速度位相空間という．状態空間は，数学的には，q^i を座標とする配位空間 Q の接バンドル TQ と呼ばれるものである．

接バンドルは，Q の各点 q ごとに接ベクトル空間 TQ_q を考え，それらの局所座標をなめらかにつないでできる空間である．TQ については，正準形式のところで余接バンドルと関連させてもう一度論ずることにする．

状態空間の座標を (q^i, ξ^i) で表すことにする．ξ^i は速度 $\dot{q}^i$ に対応する変数であるが，ξ^i は一応 $\dot{q}^i$ とは独立として扱い，q^i の時間微分の意味である $\dot{q}^i$ と区別する．したがって，q^i によって配位空間のすべての点を表し，ξ^i によって速度空間のすべての点を表すものとする．質点の現実の運動では各時刻ごとに q^i の値と $\dot{q}^i=\xi^i$ の値とが決まっているから，運動は状態空間内の1本の曲線で表される．この曲線を運動の経路と呼ぶことにする．配位空間 Q 内でも運動は1本の曲線であるが，それは状態空間での運動経路を Q に射影したものである．

Lagrange 方程式を状態空間 TQ と時間のつくる1次元空間 $\boldsymbol{R}$ との直積空間 $TQ\times\boldsymbol{R}$ 上での方程式に書き換えよう．そこで，まず Lagrange 関数 $L(q, \dot{q}, t)$ を $TQ\times\boldsymbol{R}$ 上で定義された関数 $L(q, \xi, t)$ と読み換え，同時に Lagrange 方程式は

$$-[L]_i \equiv \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \xi^i}-\frac{\partial L}{\partial q^i}=0 \qquad (i=1, \cdots, N) \tag{3-1-1}$$

とするが，この式だけでは ξ^i と $\dot{q}^i$ の関係が与えられていないので，さらに

$$\xi^i = \dot{q}^i \qquad (i=1, \cdots, N) \tag{3-1-2}$$

を付け加える．これら2式を合わせるとLagrange方程式に同値となる．この方法は，2階微分方程式を，変数を2倍にして1階微分方程式に直す方法と同じである．

(3-1-1)，(3-1-2)の2式を$TQ\times\boldsymbol{R}$上で定義された$2N$個のPfaff方程式系に書き直すと

$$\theta_i \equiv d\left(\frac{\partial L}{\partial \xi^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i}dt \tag{3-1-3}$$

$$= \frac{\partial^2 L}{\partial \xi^i \partial \xi^j} d\xi^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \xi^i \partial q^j} dq^j + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \xi^i \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q^i}\right)dt = 0,$$

$$\rho^i \equiv dq^i - \xi^i dt \tag{3-1-4}$$

となる．1-形式θ_i, ρ^iは，実は2章§2-3で導入した基本1-形式$\boldsymbol{\Omega}$の外微分から得られるのである．$\boldsymbol{\Omega}$を$TQ\times\boldsymbol{R}$上で定義し直して

$$\boldsymbol{\Omega}(q, \xi, t) \equiv \frac{\partial L}{\partial \xi^i} dq^i - \left(\frac{\partial L}{\partial \xi^i}\xi^i - L\right)dt \tag{3-1-5}$$

$$= p_i dq^i - E dt,$$

$$E \equiv p_i \xi^i - L$$

とする．$p_i = \partial L/\partial \xi^i$，および$dt\wedge dt = 0$を考慮して$\boldsymbol{\Omega}$を微分すると

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\Omega} &= dp_i \wedge dq^i - \left(\xi^i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q^i}dq^i\right)\wedge dt \\ &= \left(dp_i - \frac{\partial L}{\partial q^i}dt\right)\wedge\left(dq^i - \xi^i dt\right) = \theta_i \wedge \rho^i \end{aligned} \tag{3-1-6}$$

となる．このようにLagrange方程式は基本1-形式$\boldsymbol{\Omega}$と密接に関連している．

第1章で説明したように，Pfaff方程式系には，それと直交する生成系と呼ばれるベクトル場が付随していた．そこで，θ_i, ρ^iの生成系を求めよう．そのベクトル場は力学系の運動を生成する微分演算子であることが以下の議論で示される．状態空間TQの次元は$2N$であるから，$TQ\times\boldsymbol{R}$は明らかに$2N+1$次元である．θ_i, ρ^iは$2N$個あるので，その生成系の数はそれらの次元の差1である．なぜならば，$2N+1$次元空間で$2N$個の1-形式と直交するベクトル場は1つしかないからである．このことは，運動の経路が1次元の曲線で与えられることに対応している．

そのベクトル場を

$$X_t = a^i \frac{\partial}{\partial \xi^i} + b^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{\partial}{\partial t} \tag{3-1-7}$$

とする．ここで $\partial/\partial t$ の係数を1としたのは，生成系 X には0でない任意関数の因子の不定性があるからである．X_t と θ_i, ρ^i との内積から a^i, b^i を決定しよう．第1章§1-3の内積の定義を用いると

$$\langle\rho^i, X_t\rangle=\rho^i(X_t)=dq^i(X_t)-\xi^i dt(X_t)=b^i-\xi^i=0 \tag{3-1-8}$$

$$\begin{aligned}\langle\theta^i, X_t\rangle&=\frac{\partial^2 L}{\partial\xi^i\partial\xi^j}d\xi^j(X_t)+\frac{\partial^2 L}{\partial\xi^i\partial q^j}dq^j(X_t)+\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\xi^i\partial t}-\frac{\partial L}{\partial q^i}\right)dt(X_t)\\&=A_{ij}a^j+\frac{\partial p_i}{\partial q^j}b^j+\left(\frac{\partial p_i}{\partial t}-\frac{\partial L}{\partial q^i}\right)=0\end{aligned} \tag{3-1-9}$$

ここで A_{ij} は（2-5-9）で定義した Hessian 行列を $TQ\times\boldsymbol{R}$ で書き直した

$$A_{ij}=\frac{\partial^2 L}{\partial\xi^i\partial\xi^j} \tag{3-1-10}$$

である．この A_{ij} は当分正則であると仮定する．非正則の場合は第8章の拘束系のところで論ずることにする．よって

$$\det(A_{ij})\neq 0 \tag{3-1-11}$$

このような力学系を正則系，その L も正則な Lagrange 関数という．正則系だから，（3-1-8），（3-1-9）は一義的に解けて

$$\left.\begin{aligned}&b^i=\xi^i,\\&a^i=-(A^{-1})^{ij}\left(\frac{\partial p_j}{\partial q^k}\xi^k+\frac{\partial p_j}{\partial t}-\frac{\partial L}{\partial q^j}\right)\end{aligned}\right\} \tag{3-1-12}$$

かくして

$$X_t=-(A^{-1})^{ij}\left(\frac{\partial p_j}{\partial q^k}\xi^k+\frac{\partial p_j}{\partial t}-\frac{\partial L}{\partial q^j}\right)\frac{\partial}{\partial\xi^i}+\xi^i\frac{\partial}{\partial q^i}+\frac{\partial}{\partial t} \tag{3-1-13}$$

を得る．

このX X_t は Lagrange 方程式を与えることを次に示そう．X_t を時間発展の演算子と見ると

$$\left.\begin{aligned}&\dot{q}^i=X_t q^i=\xi^i,\\&\dot{\xi}^i=X_t\xi^i=-(A^{-1})^{ij}\left(\frac{\partial p_j}{\partial q^k}\xi^k+\frac{\partial p_j}{\partial t}-\frac{\partial L}{\partial q^j}\right)\end{aligned}\right\} \tag{3-1-14}$$

を得る．この第1式は $\rho^i=0$ に他ならない．第2式に A_{ji} を乗じて整理すると

$$A_{ij}\dot{\xi}^j+\frac{\partial p_i}{\partial q^j}\xi^j+\frac{\partial p_i}{\partial t}-\frac{\partial L}{\partial q^i}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\xi^i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q^i}=0$$

を得る．

したがって，この事実から，$TQ\times\boldsymbol{R}$ 上で与えられる物理量 $f(q,\xi,t)$ に対して

$$\frac{df(q,\xi,t)}{dt}=\frac{\partial f}{\partial\xi^i}\dot{\xi}^i+\frac{\partial f}{\partial q^i}\dot{q}^i+\frac{\partial f}{\partial t}=X_tf(q,\xi,t) \tag{3-1-15}$$

となる．よって，すべての物理量の時間発展は X_t により生成される．このように運動方程式をベクトル場としてとらえることが本書の基本的立場である．

例 3-1

運動方程式 θ_i, ρ_i は次のように $d\Omega$ と $\partial/\partial q^i$, $\partial/\partial\xi^i$ との内積からも得られる．

$$\rho_i=i\left(\frac{\partial}{\partial\xi^i}\right)d\Omega=A_{ij}(dq^j-\xi^jdt)=A_{ij}\rho^j=0$$

$$-i\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)d\Omega=\left(dp_i-\frac{\partial L}{\partial q^i}dt\right)-\frac{\partial p_j}{\partial q^i}\rho^j=\theta_i-\frac{\partial p_j}{\partial q^i}\rho^j=0$$

この両式から，$\rho^j=0$, $\theta_i=0$.

§ 3-2　Hamilton の方程式

前節では状態空間で Lagrange 方程式を記述する方法を述べ，さらにベクトル場 X_t を運動方程式と見なした．しかし，よく知られているように，Lagrange 方程式は $\dot{\xi}^i$ よりも $\dot{p}_i$ の形でまとまっているので，q^i と p_i を独立変数に選んだ方が簡単な形式になる．そこで，本節では q^i, p_i を独立変数とする Hamilton の正準方程式を，Pfaff 形式とベクトル場で表してみよう．

q^i に正準共役な運動量は，例によって

$$p_i=\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial\dot{q}^i}\qquad(i=1,\cdots,N) \tag{3-2-1}$$

とする．いま $A_{ij}=\partial p_i/\partial\dot{q}^j$ は正則であるから，すべての p_i は $\dot{q}^i$ について独立関数である．したがって，(3-2-1) は ξ^i について一義的に解くことができて，それを

$$\dot{q}^i=\xi^i(q,p,t) \tag{3-2-2}$$

とする．$(q^i,\dot{q}^i)$ と (q^i,p_i) とは1対1に対応し，力学系の状態を指定するのにどちらを用いてもよく，両者は同値である．q^i, p_i を座標とする $2N$ 次元空間を位相空間という．力学系の状態は位相空間の点で与えられ，系の時間発展は位相空間の1つの曲線で表されることは状態空間 (q^i,ξ^i) と同じである．

数学的には，位相空間は配位空間 Q の余接バンドル T^*Q であり，さらに T^*Q は

シンプレクティック多様体と見なすことができる．それらについては第５章の正準形式の理論で詳しく論ずるが，シンプレクティック構造は正準形式にとってきわめて重要なものである．

位相空間での運動方程式を Lagrange 方程式から導く．Lagrange 方程式は

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q^i}(q, \xi(q, p, t), t) \tag{3-2-3}$$

と書き直せる．ただし，Lの中の ξ^i は (3-2-2) を用いて q^i, p_i, t で表した．状態空間の運動を与える特性関数はLであったが，位相空間ではLの中の $\dot{q}^i$ を q^i, p_i, t で表しただけでなく，力学系を特徴づける特性関数も変換する必要がある．このことを体系的に行うために，次の Legendre 変換*) によって Hamilton 関数Hを定義する;

$$H = p_i\dot{q}^i - L(q, \dot{q}, t). \tag{3-2-4}$$

このHを $q^i, \dot{q}^i, t$ の関数と見れば（2-3-11）のエネルギーEである．

Hは q^i, p_i の関数と見ると $\dot{q}^i$ によらないことがわかる．なぜならば

$$dH = \dot{q}^i dp_i + \left(p_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)d\dot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial q^i}dq^i - \frac{\partial L}{\partial t}dt$$

において，p_i の定義（3-2-1）を考慮すると $d\dot{q}^i$ の項は消えて dq^i, dp_i, dt の項のみ残る．したがって，Hは $\dot{q}^i$ を実質的に含まないことがわかる．これが特性関数LをHに変換した理由である．$H(q, p, t)$ は，エネルギー関数 $E(q, \dot{q}, t)$ と値は等しいが独立変数が異なっている．

Lagrange 方程式（3-2-3）を用いて上式の第３項を書き直すと

$$dH(q, p, t) = \dot{q}^i dp_i - \dot{p}_i dq^i - \frac{\partial L}{\partial t}dt \tag{3-2-5}$$

となる．他方

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q^i}dq^i + \frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i + \frac{\partial H}{\partial t}dt \tag{3-2-6}$$

であるから，両式より

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \tag{3-2-7 a}$$

---

*）Legendre 変換は，一般に変数 u^i とその関数 $F(u, a)$（a はパラメータ）が与えられたとき，新変数 $v_i = \partial F/\partial u^i$ を導入し，v_i の関数 $G(v, a)$ を $G = v_i u^i - F$ で定義する．この変換（u^i, F）→（v_i, G）を Legendre 変換という．このとき逆変換により $u^i = \partial G/\partial v_i$ である．(3-2-4) では$L, \dot{q}^i, q^i$ が F, u^i, a^i に，H, p_i, q^i が G, v_i, q^i に対応する．

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \tag{3-2-7 b}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{dt} \tag{3-2-7 c}$$

を得る．これが位相空間における Hamilton の正準方程式であり，状態空間の Lagrange 方程式（3-1-1），（3-1-2）に対応する基礎方程式である．

L が時間 t を陽に含まないとき，H も同様であり，そのとき系のエネルギーを与える H は保存することはよく知られている．つまり，上の正準方程式を使って

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q^i} = 0.$$

さて，前節と同様，正準方程式を1-形式，あるいはベクトル場で表してみよう．ここでは正準方程式を位相空間 T^*Q と時間の空間 $\boldsymbol{R}$ の直積 $T^*Q\times\boldsymbol{R}$ 上の1-形式と見なすのである．（3-2-7 a，b）は $T^*Q\times\boldsymbol{R}$ 上の Pfaff 方程式

$${}_*\rho^i = dq^i - \frac{\partial H}{\partial p_i}dt = 0, \tag{3-2-8 a}$$

$${}_*\theta_i = dp_i + \frac{\partial H}{\partial q^i}dt = 0 \tag{3-2-8 b}$$

と同値である．これら ${}_*\rho^i, {}_*\theta_i$ は（2-3-14）の基本1-形式

$${}_*\Omega = p_i dq^i - Hdt \tag{3-2-9}$$

からも得られる．${}_*\Omega$ を外微分して

$$\begin{aligned} d{}_*\Omega &= dp_i \wedge dq^i - \frac{\partial H}{\partial q^i}dq^i \wedge dt - \frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i \wedge dt \\ &= \left(dp_i + \frac{\partial H}{\partial q^i}dt\right)\wedge\left(dq^i - \frac{\partial H}{\partial p_i}dt\right) = {}_*\theta_i \wedge {}_*\rho^i \end{aligned} \tag{3-2-10}$$

となるからである．

次に ${}_*\theta_i, {}_*\rho^i$ の生成系としてのベクトル場 ${}_*X_t$ を求めよう．前節と同様に

$$\langle {}_*\theta_i, {}_*X_t\rangle = {}_*\theta_i({}_*X_t) = 0, \quad \langle {}_*\rho^i, {}_*X_t\rangle = {}_*\rho^i({}_*X_t) = 0 \tag{3-2-11}$$

から

$${}_*X_t = \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{\partial}{\partial t} \tag{3-2-12}$$

を得る．この ${}_*X_t$ を時間発展の演算子とすれば正準方程式（3-2-7 a，b）を得るこ

とは明らかである．すなわち

$$\dot{q}^i = {}_*X_t q^i = \frac{\partial H}{\partial p_i},$$

$$\dot{p}_i = {}_*X_t p_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}.$$

後に詳述するが，${}_*X_t$ はその形からわかるようにHとの Poisson 括弧を与える線形演算子である．一般に $f(q, p)$ に対し

$$ {}_*\boldsymbol{X}_f \equiv \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i} \tag{3-2-13}$$

を f に対する Hamilton ベクトル場という．したがって，X_t は $\partial/\partial t$ を除きHに対する Hamilton ベクトル場である．

(3-2-12) の ${}_*X_t$ は (3-1-13) で与えられる X_t を直接変換しても得られる．それを示そう．まず $TQ\times\boldsymbol{R}$ の $\partial/\partial q^i$，$\partial/\partial\xi^i$ と $T^*Q\times\boldsymbol{R}$ 上の $\partial/{}_*\partial q^i$，$\partial/{}_*\partial p_i$ の関係を求める．$TQ\times\boldsymbol{R}$ 上で p_i は $p_i(q, \xi, t)$ であり，$T^*Q\times\boldsymbol{R}$ 上では p_i は独立変数であるから

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q^i} &= \frac{\partial}{{}_*\partial q^i} + \frac{\partial p_j}{\partial q^i}\frac{\partial}{{}_*\partial p_j}, \\ \frac{\partial}{\partial \xi^i} &= \frac{\partial p_j}{\partial \xi^i}\frac{\partial}{{}_*\partial p_j} = A_{ij}\frac{\partial}{{}_*\partial p_j}, \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial p_i}{\partial t}\frac{\partial}{{}_*\partial p_i} + \frac{\partial}{{}_*\partial t}, \end{aligned}\right\} \tag{3-2-14}$$

となる．他方，Lagrange 方程式を満たす ξ^i は $\dot{q}^i$ に等しいから，(3-2-7 a) および (3-2-3) と (3-2-7 b) とから

$$\xi^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial L}{\partial q^i} = -\frac{\partial H}{{}_*\partial q^i} \tag{3-2-15}$$

を得る．(3-2-7 c)，(3-2-14) および (3-2-15) を用いて，(3-1-13) の X_t を変形すると

$$X_t \to -\left(\frac{\partial p_j}{\partial q^k}\xi^k + \frac{\partial p_j}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial q^j}\right)\frac{\partial}{{}_*\partial p_j} + \xi^i\left(\frac{\partial}{{}_*\partial q^i} + \frac{\partial p_j}{\partial q^i}\frac{\partial}{{}_*\partial p_j}\right) + \frac{\partial}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial L}{\partial q^j}\frac{\partial}{{}_*\partial p_j} + \xi^i\frac{\partial}{{}_*\partial q^i} + \frac{\partial}{{}_*\partial t} = \frac{\partial H}{{}_*\partial p_i}\frac{\partial}{{}_*\partial q^i} - \frac{\partial H}{{}_*\partial q^i}\frac{\partial}{{}_*\partial p_i} + \frac{\partial}{{}_*\partial t} = {}_*X_t.$$

この ${}_*X_t$ に直交する1-形式は ${}_*\rho^i$，${}_*\theta_i$ となるから，$TQ\times\boldsymbol{R}$ と $T^*Q\times\boldsymbol{R}$ とは 1 対

1に対応していることが直接確かめられたことになる．

正準方程式が時間についての1階微分方程式であり，q^i, p_i について対称的にできていることは理論形式を大変美しくし，見通しをよくする．(3-2-7 b) の負符号は目ざわりであるが，実はこの負符号があるためにシンプレクテック構造の理論に適合するのである．古典力学の形式的な展開は正準方程式の理論を用いる方が便利である．さらに，古典力学から量子力学へ移行する場合も，通常正準形式に書き換えてから量子化を行う．その意味からも，Hamilton の正準形式は重要である．

例 3-2

1質点系

$$L=\sum_i \frac{1}{2}m(\dot{x}^i)^2-V(x^i) \to L=\sum \frac{1}{2}m(\xi^i)^2-V(x^i)$$

の場合の運動方程式を1-形式とその生成系で表してみよう．まず状態空間では

$$\rho^i=dx^i-\xi^i dt,$$

$$\theta_i=dp_i-\frac{\partial L}{\partial x^i}dt=md\xi^i+\frac{\partial V}{\partial x^i}dt$$

となる．

$$A_{ij}=m\delta_{ij}, \quad (A^{-1})^{ij}=m^{-1}\delta^{ij}, \quad p_i=m\xi^i$$

であるから

$$X_t=-\frac{1}{m}\frac{\partial V}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial \xi^i}+\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}+\frac{\partial}{\partial t}.$$

これからもわかるように，当然のことながら $\partial/\partial\xi^i$ の因子は力の m^{-1} 倍であり，X_t は通常の運動方程式を与える；

$$m\dot{\xi}^i=mX_t\xi^i=-\frac{\partial V}{\partial x^i}, \quad \dot{x}^i=\xi^i.$$

次に位相空間での式は

$$H=\sum_i \frac{1}{2m}{p_i}^2+V(x^i)$$

であるから

$$_*\rho^i=dx^i-\frac{p_i}{m}dt,$$

$$_*\theta_i=dp_i+\frac{\partial V}{\partial x^i}dt$$

となる．そして

$$ {}_{*}X_t=\frac{1}{m}p_i\frac{\partial}{{}_{*}\partial x^i}-\frac{\partial V}{{}_{*}\partial x^i}\frac{\partial}{{}_{*}\partial p_i}+\frac{\partial}{\partial t}, $$

であり，この ${}_{*}X_t$ が正準方程式を与えることは明らかである．

§ 3-3　Lagrange 関数が存在するための必要十分条件

これまでは，対象の力学系がホロノーム系である場合に，Lagrange 関数が存在することを前提にして話を進めてきた．しかし，力学系の運動方程式が先にあって，それを導く Lagrange 関数 L を求めるという場合がある．L によって系の力学的性質は初期条件を除いて決まる．そして，L の対称性から Noether の定理によって保存則が導かれるなど，L の具体的な形式を求めることは，その力学系の解明に都合がよい．しかも，運動方程式がある対称性，たとえば並進対称性を有するときでも，L が存在しないとき，運動量保存則が成り立たない（例 3-5参照）．したがって，L が存在するか否かの判定条件を定式化すること，および L が存在するとき，その L を求める処方を与えることは重要である．前 2 節と話の流れが少し変わるが，本節ではこの問題を論ずることにする．

まず，運動方程式が与えられたとき，それらを与える L が存在するための必要十分条件を求めるところから始めよう．運動方程式は $\ddot{q}^i$ については高々 1 次であり，$\dot{q}^i$, q^i については制限がないものとする．この条件は L が $q^i, \dot{q}^i$ の関数である限り常に満たされるものである．そこで，運動方程式を次のようにおく．

$$ \psi_i(q,\dot{q},\ddot{q},t)\equiv A_{ij}(q,\dot{q},t)\ddot{q}^j+B_i(q,\dot{q},t)=0, \qquad (3\text{-}3\text{-}1) $$
$$ (i,j=1,\cdots,N). $$

A_{ij}, B_i は必要なだけ微分可能な関数とする．以後，この節では $q^i, \dot{q}^i, \ddot{q}^i$ を独立変数として扱い，全微分を

$$ df(q,\dot{q},\ddot{q},t)=\frac{\partial f}{\partial q^i}dq^i+\frac{\partial f}{\partial \dot{q}^i}d\dot{q}^i+\frac{\partial f}{\partial \ddot{q}^i}d\ddot{q}^i+\frac{\partial f}{\partial t}dt $$

とする．

必要条件を得るために，(3-3-1) が $L(q,\dot{q},t)$ から導かれた Lagrange 方程式だとしよう．すると，次の恒等式が成立すべきである;

$$ \psi_i\equiv\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q^i}=-[L]_i. \qquad (3\text{-}3\text{-}2) $$

これを使うと

$$dL=\frac{\partial L}{\partial q^i}dq^i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}d\dot{q}^i+\frac{\partial L}{\partial t}dt=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}dq^i\right)+\frac{\partial L}{\partial t}dt-\psi_i dq^i \qquad (3\text{-}3\text{-}3)$$

を得る．(3-3-3) の積分可能条件，つまり L が存在するための必要条件は，$d^2=0$ ゆえ

$$d^2L=d\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}dq^i\right)+\frac{\partial L}{\partial t}dt-\psi_i dq^i\right\}=0$$

で与えられる．この式は陽に書くと

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i\partial \dot{q}^j}-\frac{\partial \psi_i}{\partial \ddot{q}^j}\right)d\ddot{q}^j\wedge dq^i+\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i\partial \dot{q}^j}d\dot{q}^i\wedge d\dot{q}^j+\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i\partial \dot{q}^j}\right)+\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i\partial q^j}-\frac{\partial^2 L}{\partial q^i\partial \dot{q}^j}\right.$$
$$\left.-\frac{\partial \psi_i}{\partial \dot{q}^j}\right]d\dot{q}^j\wedge dq^i+\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i\partial q^j}\right)-\frac{\partial \psi_i}{\partial q^j}\right]dq^j\wedge dq^i$$
$$-\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i\partial t}\right)-\frac{\partial^2 L}{\partial q\partial t}-\frac{\partial \psi_i}{\partial t}\right]dq^i\wedge dt\equiv 0. \qquad (3\text{-}3\text{-}4)$$

第2項は $\partial^2 L/\partial \dot{q}^i\partial \dot{q}^j$ が i，j につき対称だから落ちる．この式の独立な微分の各係数は恒等的に0でなければならないから，次の恒等式を得る；

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial \ddot{q}^j}\equiv\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i\partial \dot{q}^j}, \qquad (3\text{-}3\text{-}5\,\text{a})$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial \dot{q}^j}\equiv\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i\partial \dot{q}^j}\right)+\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i\partial q^j}-\frac{\partial^2 L}{\partial q^i\partial \dot{q}^j}, \qquad (3\text{-}3\text{-}5\,\text{b})$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial q^j}-\frac{\partial \psi_j}{\partial q^i}\equiv\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i\partial q^j}-\frac{\partial^2 L}{\partial q^i\partial \dot{q}^j}\right), \qquad (3\text{-}3\text{-}5\,\text{c})$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t}\equiv\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q^i}\right]. \qquad (3\text{-}3\text{-}5\,\text{d})$$

(3-3-5 d) は (3-3-2) によって自動的に満たされるから条件を与えない．(3-3-5 a, b, c) から L を消去して ψ_i についての関係式をつくれば，求める必要条件となる．(3-3-5 a) から，

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial \ddot{q}^j}=\frac{\partial \psi_j}{\partial \ddot{q}^i}, \qquad (3\text{-}3\text{-}6\,\text{a})$$

(3-3-5 b) の i，j 対称部分と (3-3-5 a) とより

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial \dot{q}^j}+\frac{\partial \psi_j}{\partial \dot{q}^i}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial \ddot{q}^j}+\frac{\partial \psi_j}{\partial \ddot{q}^i}\right)=2\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial \ddot{q}^j}\right) \qquad (3\text{-}3\text{-}6\,\text{b})$$

を得る．最後に，(3-3-5 c) に (3-3-5 a, b) を代入して，さらに (3-3-6 b) を用

いると

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial q^j}-\frac{\partial\psi_j}{\partial q^i}=\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial\psi_i}{\partial\dot{q}^j}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial\ddot{q}^j}\right)\right]=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial\dot{q}^j}-\frac{\partial\psi_j}{\partial\dot{q}^i}\right) \qquad \text{(3-3-6 c)}$$

を得る．結局 (3-3-6) の 3 式が求める必要条件である．しかし，ψ_i で表すよりも，A_{ij}, B_i に対する条件式に書き直した方が便利であるばかりでなく，L を求めるときには A_{ij}, B_i の条件式が必要である．

(3-3-6 a) は A_{ij} に対する条件を与える;

$$A_{ij}=A_{ji}. \qquad \text{(3-3-7 a)}$$

(3-3-6 b) に (3-3-2) を代入し，$\ddot{q}^k$ の係数と残りの式とから

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial\dot{q}^k}+\frac{\partial A_{jk}}{\partial\dot{q}^i}-2\frac{\partial A_{ki}}{\partial\dot{q}^j}=0, \qquad \text{(3-3-7 b)}$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial\dot{q}^j}+\frac{\partial B_j}{\partial\dot{q}^i}=2\left(\dot{q}^k\frac{\partial}{\partial q^k}+\frac{\partial}{\partial t}\right)A_{ij} \qquad \text{(3-3-7 c)}$$

を得る．最後に (3-3-6 c) からは，$\dddot{q}^k$, $\ddot{q}^k$ の係数と残りの式からそれぞれ次の 3 条件が導かれる;

$$\frac{\partial A_{jk}}{\partial\dot{q}^i}-\frac{\partial A_{ki}}{\partial\dot{q}^j}=0, \qquad \text{(3-3-7 d)}$$

$$\frac{\partial A_{jk}}{\partial q^i}-\frac{\partial A_{ki}}{\partial q^j}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 B_i}{\partial\dot{q}^j\partial\dot{q}^k}-\frac{\partial^2 B_j}{\partial\dot{q}^k\partial\dot{q}^i}\right), \qquad \text{(3-3-7 e)}$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial q^j}-\frac{\partial B_j}{\partial q^i}=\frac{1}{2}\left(\dot{q}^k\frac{\partial}{\partial q^k}+\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial B_i}{\partial\dot{q}^j}-\frac{\partial B_j}{\partial\dot{q}^i}\right). \qquad \text{(3-3-7 f)}$$

しかし (3-3-7) の各式は独立ではなく，(3-3-7 b) は (3-3-7 a, d) から導かれる．また (3-3-7 e) は (3-3-7 c) を $\dot{q}^k$ で微分した式と (3-3-7 a, d) とから導かれる．したがって，結局，L が存在するための必要条件は次の 4 式となる（実は十分条件であることが次節でわかる）;

$$A_{ij}=A_{ji}, \qquad \text{(3-3-8 a)}$$

$$\frac{\partial A_{jk}}{\partial\dot{q}^i}=\frac{\partial A_{ki}}{\partial\dot{q}^j}, \qquad \text{(3-3-8 b)}$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial\dot{q}^j}+\frac{\partial B_j}{\partial\dot{q}^i}=2\left(\dot{q}^k\frac{\partial}{\partial q^k}+\frac{\partial}{\partial t}\right)A_{ij}, \qquad \text{(3-3-8 c)}$$

$$2\left(\frac{\partial B_i}{\partial q^j}-\frac{\partial B_j}{\partial q^i}\right)=\left(\dot{q}^k\frac{\partial}{\partial q^k}+\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial B_i}{\partial\dot{q}^j}-\frac{\partial B_j}{\partial\dot{q}^i}\right). \qquad \text{(3-3-8 d)}$$

この条件を最初に得たのは H. Helmholtz である．

この理論を実際の問題に適用するにあたり，注意すべき重要な点は，最初に与えられた運動方程式(3-3-1)には，因子の不定性があるということである．つまり，ψ_i，あるいはA_{ij}, B_iには正則な行列因子$N_i{}^j$の任意性がある*)．すると，ψ_iのままでは（3-3-8）の条件を満たさないが，正則な積分因子$N_i{}^j$を乗じた

$$\tilde{\psi}_i = N_i{}^j(q, \dot{q}, t)\psi_j(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) \tag{3-3-9}$$

が条件を満たす場合がある．このときA_{ij}, B_iの代わりに

$$\tilde{A}_{ij} = N_i{}^k A_{kj}, \quad \tilde{B}_j = N_i{}^j B_j \tag{3-3-10}$$

が条件を満たす．したがって，Lが存在しないということをいうためには，このような積分因子$N_i{}^j(q, \dot{q}, t)$も存在しないことを示さなければならない．しかし，定数の$N_i{}^j$という自明な場合以外，$N_i{}^j(q, \dot{q}, t)$を乗じて得られるLは物理的意味づけがあまり明らかでない特殊なものが多いから，アカデミックな興味の域を出ない．

積分因子$N_i{}^j$の存在条件は複雑で，特別な場合を除いて，$N_i{}^j$を求める公式は知られていない．

特殊な場合として，一組の(A_{ij}, B_i)が必要条件を満たし，さらに$(\tilde{A}_{ij}, \tilde{B}_i)$が同じ条件を満たすような自明でない$N_i{}^j$が存在することもある．このとき，$\psi_i$と$\tilde{\psi}_i$にはそれぞれ異なる$L$が対応する（例3-4参照）．

駄足ながら付言すると，（3-3-5 a）からわかるように，A_{ij}は§2-5のNoetherの第2定理のところで定義したHessian行列である．A_{ij}が非正則の場合，運動方程式のあるものは独立でなくなり，代わりに拘束条件が出てくる．その場合でも，その拘束条件と独立な運動方程式とでN個の式が存在する．（3-3-8）の条件を導くにあたり，A_{ij}が正則である必要はなかったから，この必要条件は，非正則な系$\det(A_{ij})=0$にも適用できる．

例 3-3

A_{ij}が正則であれば，逆行列が存在するから，運動方程式は必ず

$$\tilde{\psi}_i = \ddot{q}^i + \tilde{B}_i(q, \dot{q}, t)$$

と書ける．もし$\tilde{B}_i$が$\dot{q}^i$によらなければ，条件（3-3-8 a, b, c）は自動的に満たされ，残る条件は（3-3-8 d）

$$\frac{\partial B_i(q,t)}{\partial q^j} = \frac{\partial B_j(q,t)}{\partial q^i}$$

---

*）$N_i{}^j$が正則でないと，（3-3-9）の$\tilde{\psi}_i$は独立でなくなり，方程式の数が減少する．

のみとなる．したがって，Stokes の定理から $U(q,t)$ が存在して

$$B_i=\frac{\partial U(q,t)}{\partial q^i}$$

と表される．よって B_i がポテンシャル U から導かれる力の成分であるとき，L は存在する．

例 3-4

A_{ij}, B_i と $\widetilde{A}_{ij}, \widetilde{B}_i$ とがともに条件(3-3-8)を満たす最も簡単な例として，保存力中の1次元運動がある．$V(x)$ をポテンシャル，$m=1$ として

$$\psi=\ddot{x}+V'(x)=0.$$

この A, B が条件を満たすことは自明である．1次元運動では条件(3-3-8 c)のみ残るから，積分因子を $N(x,\dot{x})$ とすると，$N(x,\dot{x})$ の満たすべき条件は

$$\frac{\partial}{\partial\dot{x}}(NV')=\dot{x}\frac{\partial N}{\partial x} \qquad \therefore \quad V'\frac{\partial N}{\partial\dot{x}}-\dot{x}\frac{\partial N}{\partial x}=0$$

この一般解は，ϕ を任意関数として

$$N=\phi\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2+V(x)\right)$$

である．よって

$$\widetilde{A}=\phi\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2+V\right), \quad \widetilde{B}=V'(x)\phi\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2+V\right).$$

もう一つの単純な例は，2次元の独立な等方調和振動子系である．

$$\psi_i=\ddot{x}_i+kx_i=0 \qquad (i=1,2).$$

これに対応する L は，いうまでもなく

$$L=\frac{1}{2}(\dot{x}_1{}^2+\dot{x}_2{}^2)-\frac{k}{2}(x_1{}^2+x_2{}^2)$$

この ψ_i の他に，積分因子として，定数ではあるが

$$N_i{}^j=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \widetilde{A}_{ij}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \widetilde{B}_i=k\begin{pmatrix}x_2\\ x_1\end{pmatrix}$$

となるものが存在する．

L の求め方は次節で示すが，$\widetilde{A}_{ij}, \widetilde{B}_i$ に対応する $\widetilde{L}$ は

$$\widetilde{L}=\dot{x}_1\dot{x}_2-kx_1x_2$$

である．

例 3-5　Lが存在しない例

$$\psi_1 = m_1\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = 0$$
$$\psi_2 = m_2\ddot{x}_2 + k(x_1 - x_2)^2 = 0$$

この例では (3-3-8 d) が満たされない．2質点が互いに作用し合って運動しているが，作用-反作用の法則が成立していないから，その力を導くポテンシャルが存在しないのがその理由である．

この運動方程式は x_i $(i=1,2)$ の並進変換 $\delta x_i = \epsilon$ に対して不変であるが，運動量 $m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2$ は保存しない．保存量は $(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 + (k/m_1)(x_1 - x_2)^2 - (2k/3m_2)(x_1 - x_2)^3$ である．このように運動方程式が並進対称性を有してもLが存在しないとき，運動量は保存しない．

§ 3-4　Lagrange 関数の求め方

前節で導いたLが存在するための必要条件は，十分条件でもあることを次に証明する．そのためには (3-3-8) を導いた筋道を逆にたどってもできるが，これら条件式からLを求める方法を示してもよい．

そこで Lagrange 関数を

$$L \equiv K(q, \dot{q}, t) + D_i(q, t)\dot{q}^i + C(q, t) \tag{3-4-1}$$

とおこう．D_i とCは $\dot{q}^i$ を含まないことに注意しよう．第2項は，$\dot{q}^i$ の1次の項をKとは別にわざわざ陽に表したものである．その理由はあとでわかる．(3-4-1) を恒等式 (3-3-2) に代入すると

$$A_{ij} = \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \tag{3-4-2}$$

および

$$\left(\frac{\partial D_i}{\partial q^j} - \frac{\partial D_j}{\partial q^i}\right)\dot{q}^j - \frac{\partial C}{\partial q^i} = B_i + \frac{\partial K}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}^i \partial q^j}\dot{q}^j - \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}^i \partial t} - \frac{\partial D_i}{\partial t} \tag{3-4-3}$$

を得る．

D_i, C は $\dot{q}^i$ によらぬことに注意して，$\dot{q}^j$で(3-4-3)を微分すると次式が得られる；

$$\frac{\partial D_i}{\partial q^j} - \frac{\partial D_j}{\partial q^i} = \frac{\partial B_i}{\partial \dot{q}^j} + \frac{\partial^2 K}{\partial q^i \partial \dot{q}^j} - \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}^i \partial q^j} - \frac{\partial^3 K}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j \partial q^k}\dot{q}^k - \frac{\partial^3 K}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j \partial t} \tag{3-4-4}$$

この式の i, j 反対称部分をとると

$$\frac{\partial D_i}{\partial q^j}-\frac{\partial D_j}{\partial q^i}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial B_i}{\partial \dot{q}^j}-\frac{\partial B_j}{\partial \dot{q}^i}\right)+\frac{\partial^2 K}{\partial q^i \partial \dot{q}^j}-\frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}^i \partial q^j} \tag{3-4-5}$$

これをもとの (3-4-3) に代入すると

$$\frac{\partial C}{\partial q^i}=\left[\frac{\partial^2 K}{\partial q^i \partial \dot{q}^j}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial B_i}{\partial \dot{q}^j}-\frac{\partial B_j}{\partial \dot{q}^i}\right)\right]\dot{q}^j-\frac{\partial K}{\partial q^i}-B_i+\frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}^i \partial t}+\frac{\partial D_i}{\partial t} \tag{3-4-6}$$

となる.

ここで (3-4-2) が積分できてKが求まれば，そのKを (3-4-5) の右辺に代入することにより (3-4-5) の右辺は既知量となる. (3-4-5) が積分できれば D_i が求まり，(3-4-6)の右辺も既知量となる．したがって(3-4-3)，(3-4-5)，(3-4-6)がすべて積分可能であれば K, D_i, C が求まり，Lが決定するわけである．その積分可能条件を (3-3-8) が保証してくれるのである．そのことを次に示そう.

実際に (3-4-2) から1-形式

$$a_i(\dot{q})\equiv\frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}d\dot{q}^j=A_{ij}d\dot{q}^j \tag{3-4-7}$$

をつくり，q^i, t を固定して $\dot{q}^i$ のみの外微分（それを $\dot{d}$ で表す）をとれば

$$\dot{d}a_i=\frac{\partial A_{ij}}{\partial \dot{q}^k}d\dot{q}^k\wedge d\dot{q}^j=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial \dot{q}^k}-\frac{\partial A_{ki}}{\partial \dot{q}^j}\right)d\dot{q}^k\wedge d\dot{q}^j$$

が得られる．この右辺は (3-3-8 a, b) により 0 である．すなわち，a_i は閉じている.

$$\therefore\quad \dot{d}a_i(\dot{q})=0.$$

よって Poincaréの補題により a_i は積分可能である. (1-4-6) で与えた積分公式により

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}^i}=\int_0^1 d\tau A_{ij}(q, \tau\dot{q}, t)\dot{q}^j. \tag{3-4-8}$$

Kを得るにはもう一度 (3-4-8) を積分しなければならない．そのためにこの右辺を

$$H_i(q, \dot{q}, t)\equiv\int_0^1 d\tau A_{ij}(q, \tau\dot{q}, t)\dot{q}^j \tag{3-4-9}$$

とおき，1-形式

$$h(q, \dot{q}, t)\equiv H_i d\dot{q}^i=\frac{\partial K}{\partial \dot{q}^i}d\dot{q}^i=\dot{d}K \tag{3-4-10}$$

を定義する．これを $\dot{q}$ で外微分すると，0であるから h も積分可能である．よって，積分公式により

$$K(q, \dot{q}, t)=\int_0^1 \dot{q}^i H_i(q, \dot{q}\tau, t)d\tau \tag{3-4-11}$$

を得る．これでKが求まった．

次に，(3-4-5) を積分するのであるが，その右辺を

$$Z_{[ij]}=-Z_{[ji]}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial B_i}{\partial \dot{q}^j}-\frac{\partial B_j}{\partial \dot{q}^i}\right)+\frac{\partial^2 K}{\partial q^i \partial \dot{q}^j}-\frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}^i \partial q^j} \tag{3-4-12}$$

とおいて略記する．上式でKは (3-4-11) により既知である．(3-4-5) の右辺は一見 $\dot{q}^i$ を含んでいるように見えるが，D_i の定義から $\dot{q}^i$ によらないはずである．実際，$Z_{[ij]}$ が $\dot{q}^i$ によらないことは，$\dot{q}^k$ で $Z_{[ij]}$ を微分し，(3-3-7 e) と (3-4-2) を用いると0となることからも直接確かめられる．

この $Z_{[ij]}$ から2-形式

$$z(q, t)\equiv Z_{[ij]}dq^i\wedge dq^j=2\frac{\partial D_i}{\partial q^j}dq^i\wedge dq^j \tag{3-4-13}$$

を定義する．t を固定し，q^i に関する外微分をとると

$$dz=\frac{\partial Z_{[ij]}}{\partial q^k}dq^i\wedge dq^j\wedge dq^k=\frac{1}{3}\left[\frac{\partial Z_{[ij]}}{\partial q^k}+\frac{\partial Z_{[jk]}}{\partial q^i}+\frac{\partial Z_{[ki]}}{\partial q^j}\right]dq^i\wedge dq^j\wedge dq^k$$

$$=\frac{1}{6}\left[\frac{\partial^2 B_i}{\partial \dot{q}^j \partial q^k}+\frac{\partial^2 B_j}{\partial \dot{q}^k \partial q^i}+\frac{\partial^2 B_k}{\partial \dot{q}^i \partial q^j}-\frac{\partial^2 B_i}{\partial \dot{q}^k \partial q^j}-\frac{\partial^2 B_j}{\partial \dot{q}^i \partial q^k}-\frac{\partial^2 B_k}{\partial \dot{q}^j \partial q^i}\right]dq^i\wedge dq^j\wedge dq^k.$$

Kの微分項は i, j あるいは j, k; k, i につき対称なので落ちた．

他方，(3-3-8 d) を $\dot{q}^k$ で微分し，i, j, k の循環和をとって整頓すると

$$\varepsilon^{ijk}\frac{\partial B_i}{\partial \dot{q}^j \partial q^k}=0 \tag{3-4-14}$$

を得る*)．これは上式の[　]の中が0なることを示す．よって

$$dz=0$$

となるから，(3-4-13) は積分可能である．再び積分公式により

$$2D_i dq^i=-\int_0^1 d\tau\, \tau Z_{[ij]}(\tau q, t)(q^i dq^j-q^j dq^i)+2\frac{\partial G}{\partial q^i}dq^i$$

---

*) ε^{ijk} は3階完全反対称テンソルである．

$$=2\int_0^1 d\tau\, \tau Z_{[ij]}(\tau q, t) q^j dq^i + 2\frac{\partial G}{\partial q^i} dq^i$$

ここにGはq^i, tの任意関数である．

$$\therefore \quad D_i = q^j \int_0^1 d\tau\, \tau Z_{[ij]}(\tau q, t) + \frac{\partial G}{\partial q^i} \tag{3-4-15}$$

を得る．Gによる任意性の意味はあとで説明する．

最後にCを求めよう．(3-4-6) の右辺は (3-4-11)，(3-4-15) により既知である．それを簡単に Y_i とおく；

$$Y_i \equiv \left[\frac{\partial^2 K}{\partial q^i \partial \dot{q}^j} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial B_i}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial B_j}{\partial \dot{q}^i}\right)\right]\dot{q}^j - \frac{\partial K}{\partial q^i} - B_i + \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}^i \partial t} + \frac{\partial D_i}{\partial t}. \tag{3-4-16}$$

Y_i もCの定義から $\dot{q}^i$ を含むべきでない．実際に，上式の右辺を $\dot{q}^k$ で微分し，(3-3-7 a, c, e)，(3-4-2) を用いると $\partial Y_i/\partial \dot{q}^k = 0$ となる．(3-4-6) が積分可能条件を満たすことを示すために，1-形式

$$y = Y_i dq^i = \frac{\partial C}{\partial q^i} dq^i \tag{3-4-17}$$

を導入する．t を固定して，外微分をとると

$$dy = \frac{\partial Y_i}{\partial q^j} dq^j \wedge dq^i$$

$$= \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 B_i}{\partial q^j \partial \dot{q}^k} - \frac{\partial^2 B_k}{\partial q^j \partial \dot{q}^i}\right)\dot{q}^k - \frac{\partial B_i}{\partial q^j} + \frac{\partial^3 K}{\partial \dot{q}^i \partial q^j \partial t} + \frac{\partial^2 D_i}{\partial q^j \partial t}\right] dq^j \wedge dq^i$$

を得る．上式の[　]の中でi, j 対称項は落とした．右辺の $(\partial B_i/\partial q^j) dq^j \wedge dq^i$ に (3-3-8 d) を代入し，整頓すると

$$dy = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 B_i}{\partial q^j \partial \dot{q}^k} + \frac{\partial^2 B_j}{\partial q^k \partial \dot{q}^i} + \frac{\partial^2 B_k}{\partial q^i \partial \dot{q}^j}\right)\dot{q}^k + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}^i \partial q^j} - \frac{1}{2}\frac{\partial B_i}{\partial \dot{q}^j} + \frac{\partial D_i}{\partial q^j}\right)\right] dq^j \wedge dq^i$$

となる．右辺第1括弧の中は (3-4-14) のゆえに，また第2括弧の中は (3-4-5) と $dq^j \wedge dq^i$ の i, j 反対称性のゆえに消える．よって

$$dy = 0.$$

(3-4-17) は積分できて

$$C = q^i \int_0^1 d\tau\, Y_i(q\tau, t). \tag{3-4-18}$$

かくして，(3-4-11) のK，(3-4-15) の D_i，(3-4-18) のCと (3-4-1) とからL

が求まる．これで(3-3-8)の条件はLが存在するための十分条件であることが証明された．

(3-4-1) で$D_i\dot{q}^i$の項を陽に書き出した理由は上記の手続きで明らかであろう．Kに関する式(3-4-2)は$\dot{q}$の２階微分であるから，$\dot{q}^i$の１次式はこれから決められないからである．また，K, D_i, Cを積分するとき，積分定数の任意性があるが，それらは (3-4-15) の$\partial G/\partial q^i$を除きすべて省略した．しかしながら，これらの任意性は，実はLの任意性，すなわち時間の全微分項の任意性に帰着することが示される．したがって，物理的意味がないので省略してよい．そのことを次に証明する．

まず，Kの積分 (3-4-9) と (3-4-11) で省略した積分定数を加えたものを$\bar{K}$で表そう．すると一般に

$$\bar{K}=K+V_i(q,t)\dot{q}^i+U(q,t) \tag{3-4-19}$$

と書ける．V_i, Uはq, tの任意関数，Kは (3-4-11) で与えられたものとする．(3-4-15)の$\partial G/\partial q^i$はV_iの中に含ませられるので省く．(3-4-15)の$Z_{[ij]}$と(3-4-18)のY_iの中のKに$\bar{K}$を用いて積分したものをそれぞれ$\bar{D}_i$と$\bar{C}$で表すと，$\bar{D}_i, \bar{C}$は (3-4-5) と (3-4-6) でKの代わりに$\bar{K}$を用いた式を満足する．したがって，D_iと$\bar{D}_i$に対する (3-4-5) の２式から

$$\frac{\partial}{\partial q^j}(\bar{D}_i-D_i+V_i)=\frac{\partial}{\partial q^i}(\bar{D}_j-D_j+V_j) \tag{3-4-20}$$

を得る．同様に (3-4-6) から次式を得る．

$$\frac{\partial}{\partial q^i}(\bar{C}-C+U)=\frac{\partial}{\partial t}(\bar{D}_i-D_i+V_i). \tag{3-4-21}$$

(3-4-20) からある関数$R(q,t)$が存在して

$$\bar{D}_i-D_i+V_i=\frac{\partial R}{\partial q^i} \tag{3-4-22}$$

と表される．すると (3-4-21), (3-4-22) から

$$\bar{C}-C+U=\frac{\partial R}{\partial t} \tag{3-4-23}$$

となる．結局 (3-4-19), (3-4-22), (3-4-23) から，$\bar{K}, \bar{D}, \bar{C}$に対応する$\bar{L}$は

$$\bar{L}=L+\frac{\partial R}{\partial q^i}\dot{q}^i+\frac{\partial R}{\partial t}=L+\frac{dR}{dt} \tag{3-4-24}$$

と表される．

結局，前節からの結論をまとめると，運動方程式

$$\psi_i(q,\dot{q},\ddot{q},t)=A_{ij}(q,\dot{q},t)\ddot{q}^j+B_i(q,\dot{q},t)=0$$

が与えられたとき，それらを与える Lagrange 関数 $L(q,\dot{q},t)$ が局所的に存在するための必要十分条件は（3-3-5）または（3-3-8）の 4 式である．そのとき L は，時間の全微分項の不定性を除き，（3-4-1）と（3-4-11），（3-4-15），（3-4-18）により一義的に決まる．

例 3-6　同一運動方程式を与える異なる L

前の例 3-4で 1 次元運動

$$\psi=\ddot{x}+V'(x)=0$$

を考えた．この ψ を与える L は，いうまでもなく $L=(1/2)\dot{x}^2-V(x)$ であるが，積分因子 $\phi(\dot{x}^2/2+V)$ を最も簡単にし

$$N=\dot{x}^2+kx^2\neq0 \qquad ただし \qquad V=\frac{1}{2}kx^2$$

とすると

$$\tilde{A}=\dot{x}^2+kx^2,$$
$$\tilde{B}=(\dot{x}^2+kx^2)kx$$

となる．これより K,D,C を求める．

$$H(q,\dot{q},t)=\int_0^1\dot{x}(\tau^2\dot{x}^2+kx^2)d\tau=\frac{1}{3}\dot{x}^3+kx^2\dot{x},$$

$$K=\int_0^1\dot{x}\left(\frac{1}{3}\tau^3\dot{x}^3+kx^2\dot{x}\tau\right)d\tau=\frac{1}{12}\dot{x}^4+\frac{k}{2}\dot{x}^2x^2.$$

1 次元だから $Z_{[ij]}=0$，したがって $D=0$.

$$Y=2kx\dot{x}^2-kx\dot{x}^2-kx(\dot{x}^2+kx^2)=-k^2x^3,$$

$$\therefore\quad C=x\int_0^1d\tau(-k^2x^3\tau^3)=-\frac{1}{4}k^2x^4.$$

まとめると

$$\tilde{L}=K+C=\frac{1}{12}\dot{x}^4+\frac{1}{2}kx^2\dot{x}^2-\frac{1}{4}k^2x^4$$

となる．

例 3-4で与えたもう 1 つの 2 次元調和振動子の例では，積分因子が

$N_{ij}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ で，　$\tilde{A}_{ij}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，　$\tilde{B}_i=k\begin{pmatrix}x_2\\ x_1\end{pmatrix}$ の場合

$$K=\dot{x}_1\int_0^1 \dot{x}_2\tau d\tau+\dot{x}_2\int_0^1 \dot{x}_1\tau d\tau=\dot{x}_1\dot{x}_2,$$

$$D_i=0,$$

$$C=-kx_1\int_0^1 x_2\tau d\tau-kx_2\int_0^1 x_1\tau d\tau=-kx_1x_2.$$

よって

$$\tilde{L}=\dot{x}_1\dot{x}_2-kx_1x_2.$$

この例からわかるように，同じ運動方程式を与える，異なる Lagrange 関数が存在する場合がある．最初の例のように，ϕ の関数形は任意だから，いくらでも複雑な L をつくることが原理的には可能である．ただし，それら L の物理的な意味は不明である．

例 3-7

$$\psi_i=m\ddot{x}^i-k\dot{x}^i+\frac{\partial V}{\partial x^i}=0$$

この例は，このままでは (3-3-8 c) を満たさない．しかし，時間 t の積分因子を乗ずれば，他の条件式を変えずに，それを満たすようにできる．

$$N_i{}^j=\delta_i{}^j a(t)$$

とおくと

$$\tilde{A}_{ij}=ma(t)\delta_{ij},\quad \tilde{B}_i=a(t)\left(-k\dot{x}^i+\frac{\partial V}{\partial x^i}\right).$$

(3-3-8 c) に代入すると，$a(t)=e^{-kt/m}$ を得る．

これより

$$K=\frac{m}{2}a(\dot{x}^i)^2,\quad D_i=0,\quad C=-aV(x)$$

$$\therefore\quad L=e^{-kt/m}\left(\frac{m}{2}(\dot{x}^i)^2-V(x)\right)$$

となる．運動方程式に $\dot{x}^i$ の 1 次の項がある場合は，通常 t を含む積分因子が必要である．

第4章　基本1-形式とCartanの原理

§4-1　配位空間と位相空間の関係

第2章§2-2では，配位空間QでのHamiltonの変分原理からLagrange方程式を導いたが，位相空間T^*Qに変分原理を適用することによって正準方程式を導くことができる．

T^*Qにおける独立変数はq^i, p_iである．Qでの独立な変分はδq^iであって，$\delta\dot{q}^i$は独立変分とはしなかった．T^*Qでの変分はδq^iとδp_iを独立変分とするから，両者の変分法は異なる内容をもっている．しかし，第3章§3-2で示したように，Legendre変換によって，Lagrange方程式とHamiltonの正準方程式とは，少なくとも正則系においては1対1に対応している．したがって，T^*Qにおける変分原理とQにおけるHamiltonの原理とは対応関係があることが予想される．

だから，T^*Qでの変分法で正準方程式を導く前に，Qにおける曲線cをT^*Qにおける曲線$_*c$に移す**持ち上げ**（lift）について説明しておこう．それによってLagrange方程式と正準方程式とが同等であることが示される．

Legendre変換によって，基本1-形式

$$\Omega = p_i(q, \dot{q}, t)dq^i - E(q, \dot{q}, t)dt \qquad \left(E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i - L\right) \tag{4-1-1}$$

$$_*\Omega = p_i dq^i - H(q, p, t)dt \qquad (i = 1, \cdots, N) \tag{4-1-2}$$

が対応していた．しかし，ここではp_iは$\partial L/\partial\dot{q}^i$で定義されたものでなく，一応両者は無関係とする．もし，p_iが

$$p_i = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}^i} \tag{4-1-3}$$

とすれば，これを（4-1-2）に代入すると（4-1-1）になり

$$_*\Omega \to \Omega = L(q, \dot{q}, t)dt \tag{4-1-4}$$

に等しい．

p_iとしてq^iの共役運動量（4-1-3）を用いてQとT^*Qを関係づけることを，QからT^*Qへの持ち上げという．もう少し正確にいうと，Q内の曲線

$$c : q^i = q^i(t) \tag{4-1-5}$$

が与えられたとき，余接バンドルT^*Q内の曲線$_*c$を

$$_*c : q^i = q^i(t), \quad p_i = p_i(t) = \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial \dot{q}^i} \tag{4-1-6}$$

によって定義する．この曲線$_*c$をcの持ち上げと呼ぶ．すると(4-1-2)と(4-1-4)から

$$\int_{_*c} {}_*\Omega \to \int_c \Omega = \int_c L\, dt \tag{4-1-7}$$

が得られる．

Qにおける曲線cを持ち上げた$_*c$は，（3-2-5）の関係

$$dH = \dot{q}^i dp_i - \dot{p}_i dq^i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \tag{4-1-8}$$

から明らかなように

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial p_i} \tag{4-1-9}$$

を満たす．逆に，T^*Q内のある曲線$_*c$が

$$_*c : q^i = q^i(t), \quad p_i = p_i(t)$$

で表されているとする．$_*c$が（4-1-9）を満たせば，$_*c$はQ内のcを持ち上げたものであることが，次のようにしてわかる．与えられた$H(q, p, t)$から出発してLegendre変換を施そう．それを

$$L' = \dot{q}^i p_i - H(q, p, t) \tag{4-1-10}$$

とおく．この微分をとると

$$dL' = p_i d\dot{q}^i + \left(\dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right) dp_i - \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i - \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

仮定により（4-1-9）が成り立つから，上式の第2項は落ちる．よってL'はp_iを含まぬことがわかり，かつ

$$p_i = \frac{\partial L'(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}^i} \tag{4-1-11}$$

を得る．(4-1-9) を p_i につき解き，(4-1-10) に代入すれば L' が $q^i, \dot{q}^i, t$ の関数として求まる．その L' を Lagrange 関数として (4-1-11) を用いれば，p_i が $q^i, \dot{q}^i$ によって表される．したがって，Q 内に，ある曲線 c：$q^i = q^i(t)$ が存在して，${}_*c$ はその c を持ち上げたものである．逆に c は ${}_*c$ を Q に射影したものである．

以上のことをまとめると，配位空間 Q 内の曲線 c と位相空間 T^*Q 内の曲線 ${}_*c$ があって，${}_*c$ が c の持ち上げであるための必要十分条件は (4-1-9) が成り立つことである．

次に，数学的構造から位相空間 T^*Q と配位空間 Q との関係を見ることにしよう．T^*Q を Q の一般座標 q^i とその共役運動量 p_i でつくられる空間とした．ところで (4-1-3) を見ると，q^i の値を決めれば p_i の値が決まるというのではなく，$\dot{q}^i$ に依存していろいろな値をとりうることを示している．q^i と $\dot{q}^i$ とは，§3-1 で述べたように，状態空間 (速度位相空間) TQ において独立に選べるからである．

そこで，Q の各点 q^i で p_i がつくる空間をくくりつけたような空間を考えてみよう．Q が 1 次元の場合を概念的に図示すると，図 4-1 のようになる．実際に 1 つの運動が決まると，q^i と $\dot{q}^i$ が決まるから Q の各点で q^i と p_i の値が定まり，図の Q に直交する直線上の一点 R が定まる．この点 R は位相空間 T^*Q 内の一点 (q^i, p_i) と同定できる．したがって，T^*Q は Q の各点に p_i のとりうる値からなる空間をくくりつけてできる空間と見なされる．これと似たものに，たとえば，電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ または磁場 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ などがある．$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ は 3 次元空間の各点 $\boldsymbol{r}$ にベクトル $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ をくくりつけたものと考えられる．

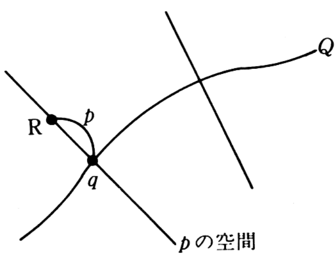


図 4-1

この T^*Q を多様体の概念を用いて表現してみよう．まず Q の座標変換

$$q^i \to Q^i = Q^i(q) \tag{4-1-12}$$

を考える．このとき p_i の変換はその定義 (4-1-3) によって決まる．すなわち

$$\dot{Q}^i = \frac{\partial Q^i}{\partial q^j}\dot{q}^j \qquad \text{より} \qquad \frac{\partial \dot{Q}^i}{\partial \dot{q}^j} = \frac{\partial Q^i}{\partial q^j}$$

が得られるから，Lがこの変換に対しスカラーであることを考慮すれば

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial L(Q, \dot{Q}, t)}{\partial \dot{Q}^j}\frac{\partial \dot{Q}^j}{\partial \dot{q}^i} = P_j \frac{\partial Q^j}{\partial q^i} \tag{4-1-13}$$

を得る．ここで P_i は Q^i に共役な運動量である．この式は p_i が共変ベクトルであることを示している．すると 1-形式

$$\omega_1 = p_i dq^i = P_i dQ^i \tag{4-1-14}$$

は座標系によらない量であることがわかる．

空間Qにおいて，（局所）座標 q^i と共変ベクトル場 p_i を座標とする $2N$ 次元空間をQ上の余接バンドル T^*Q という．Qの各点 q^i における接空間 TQ 上で定義される 1-形式を点 q^i におけるQの余接ベクトルといい，この余接ベクトルのつくる線形空間を点 q^i におけるQの余接空間という．余接ベクトルは共変ベクトルに相当する．したがって（4-1-14）の ω_1 は，dq^i を基底とし，p_i を成分とする余接ベクトルである．というわけで，位相空間の点（q^i, p_i）は余接バンドル T^*Q の元と見なせる．

ここで強調すべきことは，最も中心的役割を演ずる基本 1-形式 $_*\Omega$ の時間成分を落とした ω_1 が T^*Q の元であるということである．したがって，ω_1 は状態空間 TQ よりも T^*Q で考える方が自然なのである．p_i が共変ベクトルであるために，T^*Q で ω_1 は座標によらないで話を進めることができる．ということは，正準形式の理論も座標系によらず記述できる可能性を示唆している．これが，TQ における Lagrange 形式よりも正準形式の方が，多様体の概念からすると，すぐれており，数学的に美しい形式になる理由である．

ω_1 を外微分して得られる 2-形式

$$\omega_2 = d\omega_1 = dp_i \wedge dq^i \tag{4-1-15}$$

は位相空間の数学的構造を規定する重要な形式である．ω_2 は T^*Q における 1-形式とベクトル場を結び付けるので，ちょうど計量テンソルの役目をする．位相空間 $\boldsymbol{P}$ と 2-形式 ω_2 によって定まる空間（$\boldsymbol{P}, \omega_2$）をシンプレクティク多様体という．それらについての詳しい説明は第5章に譲る．

最後に次のことを付け加えておく．T^*Q の元は（q^i, p_i）で決まる 1-形式 ω_1 であるが，位相空間での 1-形式 $a_i dq^i + b^i dp_i$ は，T^*Q の余接バンドル $T^*(T^*Q)$

の元である．またベクトル場$x^i(\partial/\partial q^i)+y_i(\partial/\partial p_i)$は$T^*Q$の接バンドル$T(T^*Q)$の元である．

§ 4-2　位相空間での変分原理

いよいよ位相空間T^*Qでの変分原理から正準方程式を導き，Qにおける Hamilton の原理とは同値であることを示そう．

基本 1-形式$_*\Omega$の外微分は§3-2で示したように，

$$d_*\Omega={}_*\theta_i\wedge{}_*\rho^i, \tag{4-2-1}$$

$${}_*\rho^i=dq^i-\frac{\partial H}{\partial p_i}dt, \tag{4-2-2 a}$$

$${}_*\theta_i=dp_i+\frac{\partial H}{\partial q^i}dt \tag{4-2-2 b}$$

となる．$\dot{q}^i$の式（4-1-9）は$_*\rho^i=0$と表される．正準方程式と同値な

$${}_*\rho^i=0,\quad {}_*\theta_i=0 \tag{4-2-3}$$

を満たすT^*Q内の曲線を，特にe曲線と呼ぶことにしよう．するとe曲線は（4-1-9）を満たすから，当然Q内の曲線cを持ち上げたものである．

他方，T^*Qにおける最小作用の原理は，作用積分

$${}_*J[q,p]=\int_{*c}{}_*\Omega=\int_{*c}[p_i dq^i-H(q,p,t)dt] \tag{4-2-4}$$

の停留条件として表される．端点$P_1(q_1{}^i,t_1)$，$P_2(q_2{}^i,t_2)$を固定した変分をとると

$$\begin{aligned}\delta_*J[q,p]&=\int_{*c}\left[dq^i\delta p_i+p_i\delta(dq^i)-\left(\frac{\partial H}{\partial q^i}\delta q^i+\frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i\right)dt\right]\\&=\int_{*c}\left[\left(dq^i-\frac{\partial H}{\partial p_i}dt\right)\delta p_i-\left(dp_i+\frac{\partial H}{\partial q^i}dt\right)\delta q^j\right].\end{aligned} \tag{4-2-5}$$

ただし，$\delta d=d\delta$，$\delta q^i(t_1)=\delta q^i(t_2)=0$を用いて$d$について部分積分を行った．

e曲線に対して（4-2-3）が満たされるから

$$\delta_*J[q,p]_e=0 \tag{4-2-6}$$

逆にδp_i，δq^iを独立変分とする変分に対して，$\delta_*J=0$なるためには正準方程式が満たされねばならない．

以上の考察の上に立って，Hamilton の原理

$$\delta J[q]_c = \delta \int_c L(q, \dot{q}, t) dt = 0 \tag{4-2-7}$$

と（4-2-6）とは同値であることがわかる．それを次に示そう．$\delta J[q]_c$ が曲線 $c = c_0$ 上で停留値をとるとする．つまり，c_0 は Lagrange 方程式に従う運動の経路である．このとき，（4-1-3）で p_i を定義すれば，（4-1-7）によって

$$J[q]_c = {}_*J[q, p]_{*c} \tag{4-2-8}$$

であるから，${}_*J[q, p]$ は ${}_*c_0$ で停留値をとる．ただし，${}_*c_0$ は c_0 を T^*Q に持ち上げた曲線を表す．したがって，（4-2-6）によって ${}_*c_0$ は e 曲線である*)．つまり ${}_*c_0$ は正準方程式によって決まる運動経路である．

逆に，${}_*J[q, p]$ が停留値をとる e 曲線 ${}_*c_0$ が与えられたとしよう．${}_*c_0$ 上の点は正準方程式を満たすから，${}_*\rho^i = 0$ が成り立つので ${}_*c_0$ は Q における c_0 を持ち上げたものである．だから，再び（4-2-8）のおかげで $J[q]_{c_0}$ も停留値をとることがわかり，c_0 上の点は Lagrange 方程式を満たす．

こうして Lagrange 方程式と Hamilton の正準方程式が，変分原理の立場からも同値であることがわかった．しかし，δq^i と δp_i とを独立変分とする T^*Q での変分原理と Q での Hamilton の原理とは，一般に異なることに留意すべきである．なぜならば Hamilton の原理に包含される曲線は T^*Q に持ち上げることによって，T^*Q での変分原理にも包含されるが，T^*Q の方が Q よりより大きいので，T^*Q の変分原理で考慮される曲線の中には Q から持ち上げられたもの以外の曲線もありうるからである．それにもかかわらず，e 曲線だけは両空間で1対1に対応しているのである．

§ 4-3　積分不変式と Cartan の原理

状態空間 $TQ \times \boldsymbol{R}$ における点 $\mathrm{P}_1(q_1, t_1)$ から $\mathrm{P}_2(q_2, t_2)$ までの作用積分 $J[q]$ の変分は，実現される運動経路 c に対して

$$\delta J[q]_c = \boldsymbol{\theta}(t_2) - \boldsymbol{\theta}(t_1), \tag{4-3-1}$$
$$\boldsymbol{\theta}(t) = p_i \delta q^i - E \delta t$$

で表されることを§2-3で示した．この表式から積分不変式が得られる．そして，

*)　ここで $J[q]$ と ${}_*J[q, p]$ の停留値は1つしかないことを仮定している．停留値の一義性を正しく示すには変分問題の十分条件を用いなければならない．十分条件をきちんと与えることは本書で定式化した変分法の枠を越えるので省略する．詳しいことは文献[1]参照．

その不変式をもとに，E. Cartan は力学の重要な原理を引き出した．[2]

状態空間 TQ の一点 $P_1(q_1, \xi_1, t_1)$ を初期値とする運動の経路 c は 1 つ決まる．c 上の他の点を $P_2(q_2, \xi_2, t_2)$ としよう．始点 P_1 を TQ の中で移動させると，それにつれて終点 P_2 も移動する．そこで P_1 が 1 つの閉曲線 l_1 を描くと，P_2 も閉曲線 l_2 を描き，経路 c は 1 つの管をつくる．この管を TQ における経路管と呼ぼう．

閉曲線 l_1, l_2 は 1 つの媒介変数 u を連続的に $[0,1]$ の間で変えるときできる曲線とする．そうすると，変分 δq^i，$\delta\xi^i$，δt は u の微小変化によって引き起こされる変分と見なしうる．つまり隣接する 2 つの経路 c と $c+\delta c$ 上の 2 点を結ぶ量と見なせる．

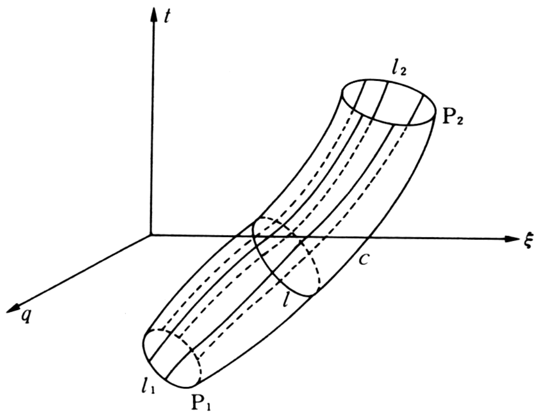


図 4-2

こうすると，(4-3-1) は次のように表現される．隣接する 2 つの経路 c と $c+\delta c$ 上の作用積分の差は，$t=t_1$ と t_2 における基本 1-形式の変分形 $\boldsymbol{\theta}$ の差に等しい．ただし，c と $c+\delta c$ の両端はそれぞれ時刻 t_1, t_2 および $t_1+\delta t_1$，$t_2+\delta t_2$ で区切られているものとする．閉曲線 l_1 上を P_1 が 1 周してもとに戻ったとき，作用積分 $J[q]$ はもとの値に戻るからその全変分は 0 である*)；

$$\therefore \quad \oint \delta J = \int_0^1 \frac{\partial J}{\partial u}\,\delta u = 0 \tag{4-3-2}$$

*) $TQ\times\boldsymbol{R}$，$T^*Q\times\boldsymbol{R}$ は連続で，経路管の中には特異点はないとする．磁気単極子のあるときに生ずる特異線のある場合は，その特異線を避けた経路管を選ぶか，さもなければ，特別の考察が必要である．

かくして，(4-3-1) の t_1, t_2 は任意であるから，それと (4-3-2) から

$$\oint_{l_1}\boldsymbol{\theta}=\oint_{l_2}\boldsymbol{\theta}=\text{一定} \tag{4-3-3}$$

を得る．l_1, l_2 は t 一定の閉曲線でなくてよいところに注目すべきである．

すなわち，状態空間 $TQ\times\boldsymbol{R}$ の中で運動の経路管を1つ決めたとき，その経路管を1周する任意の閉曲線 l に沿った $\boldsymbol{\theta}$ の積分は一定である；

$$I=\oint_{l}\boldsymbol{\theta}=\text{一定} \tag{4-3-4}$$

この式を運動方程式のもとでの相対積分不変式という．(4-3-4) は閉曲線に対してのみ成立し，開いた任意の曲線に対して成立しないので「相対」不変式である．

正則系においては状態空間と位相空間は1対1に対応しているから，この結果は位相空間 (q^i, p_i, t) においてもそのまま成り立つ．

積分不変式の概念は，最初 Poincaré に負っている．彼は時間を一定にした不変式

$$\oint_{t\,\text{固定}} p_i\,\delta q^i=\text{時間によらず一定}$$

を示した．(4-3-4) はこの一般化である．しかし，この一般化は単なる拡張ではなく，質的進歩をもたらした．時間の変分まで含めた積分不変式 (4-3-4) からは，運動方程式が導かれるので，Hamilton の原理に代わり，これを力学の新しい原理としうることを E.Cartan が示したのである．

Cartan の原理

状態空間 (q^i, ξ^i, t) あるいは位相空間 (q^i, p_i, t) において，運動の経路管を1つ決めたとき，その管を囲み1周する任意の閉曲線 l に沿った基本1-形式 $\boldsymbol{\theta}$ の積分 (4-3-4) は一定である．また逆に，すべての l に対してこの積分 I を一定にする経路管をつくる経路群は Lagrange 方程式，あるいは正準方程式の解に限られる．

(**証明**)　この原理の前半はこれまでの説明から明らかなので，後半を証明する．位相空間における証明もまったく同様にできるので，状態空間 $TQ\times\boldsymbol{R}$ の場合を証明する．$TQ\times\boldsymbol{R}$ の中で1つの経路管を考え，それを2つのパラメータ u と v で表現しよう：$q^i(u,v)$，$\xi^i(u,v)$，$t(u,v)$．v を一定に保ち，u を $[0,1]$ で変えたとき，管を1周する1つの閉曲線 l_v が描かれるとする．また $v+dv=$一定 としたと

きの u による閉曲線を l_{v+dv} とする．u による変化を δ，v による変化を d で表すと，l_v と l_{v+dv} に沿った $\boldsymbol{\theta}$ の積分の差は

$$dI=\oint_{l_{v+dv}}\boldsymbol{\theta}-\oint_{l_v}\boldsymbol{\theta}=\oint_{l_v}[dp_i\delta q^i-dE\delta t+p_i d(\delta q^i)-Ed(\delta t)]$$

となる．この積分は u，つまり δ についての積分である．d と δ の順序を入れ替えて，最後の 2 項を部分積分すると，積分されたもの

$$\Big[p_i dq^i-Edt\Big]_{u=0}^{u=1}$$

は，$u=0$ と 1 は同一点なので明らかに 0 である．仮定によって $dI=0$ であるから

$$dI=\oint_{l_v}[dp_i\delta q^i-dq^i\delta p_i+\delta Edt-\delta tdE]=0 \tag{4-3-5}$$

この式は経路管のとり方や l_v のいかんにかかわらず成立すべきであるから，δq^i，$\delta\xi^i$，δt の係数が 0 でなければならない．さらに

$$\left.\begin{aligned}\delta p_i(q,\xi,t)&=\frac{\partial p_i}{\partial q^j}\delta q^j+\frac{\partial p_i}{\partial \xi^j}\delta\xi^j+\frac{\partial p_i}{\partial t}\delta t\\ \delta E(q,\xi,t)&=\frac{\partial E}{\partial q^i}\delta q^i+\frac{\partial E}{\partial \xi^i}\delta\xi^i+\frac{\partial E}{\partial t}\delta t\end{aligned}\right\} \tag{4-3-6}$$

なることに注意して，(4-3-5) から次式を得る；

$$dp_i-\frac{\partial p_j}{\partial q^i}dq^j+\frac{\partial E}{\partial q^i}dt=0 \tag{4-3-7 a}$$

$$\frac{\partial p_j}{\partial \xi^i}dq^j-\frac{\partial E}{\partial \xi^i}dt=0 \tag{4-3-7 b}$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial t}dq^i+dE-\frac{\partial E}{\partial t}dt=0 \tag{4-3-7 c}$$

p_i, E の定義を用いて，q^i, ξ^i, t で表し，上式に代入すると，(4-3-7 b) は

$$A_{ij}(dq^j-\xi^j dt)=0 \tag{4-3-8}$$

となる．A_{ij} は Hessian 行列である；

$$A_{ij}=A_{ji}=\frac{\partial p_i}{\partial \xi^j}=\frac{\partial^2 L}{\partial \xi^i\partial \xi^j} \tag{4-3-9}$$

A_{ij} が正則な場合を扱っているので，(4-3-8) から

$$\rho^i=dq^i-\xi^i dt=0 \tag{4-3-10 a}$$

を得る．これを（4-3-7 a）に代入して

$$\theta_i = dp_i(q, \dot{q}, t) - \frac{\partial L}{\partial q^i} dt = 0 \qquad \text{(4-3-10 b)}$$

この ρ^i, θ_i は第3章§3-1で得た TQ での運動方程式に他ならない．

（4-3-7 c）は（4-3-10 a, b）から導かれるから，新たな条件を与えない．なぜならば，（4-3-10 a）を用いると

$$\text{(4-3-7 c)} = \frac{\partial p_i}{\partial t}\xi^i dt + \frac{\partial E}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial E}{\partial \xi^i} d\xi^i$$

（4-3-10 b）から得られる式

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} dt = -\frac{\partial p_i}{\partial q^j} dq^j - \frac{\partial p_i}{\partial \xi^j} d\xi^j + \frac{\partial L}{\partial q^i} dt$$

を上の式に代入して

$$\text{(4-3-7 c)} = \left(-\frac{\partial p_i}{\partial q^j} dq^j - \frac{\partial p_i}{\partial \xi^j} d\xi^j + \frac{\partial L}{\partial q^i} dt\right)\xi^i + \left(\frac{\partial p_j}{\partial q^i}\xi^j - \frac{\partial L}{\partial q^i}\right) dq^i + \frac{\partial p_j}{\partial \xi^i}\xi^j d\xi^i$$

となる．再び（4-3-10 a）を使うと，上式は0となる．

正準形式の場合は $T^*Q \times \boldsymbol{R}$ の中の経路管を考え，E の代わりに H を用い，δq^i, δp_i, δt の係数を0とおけば，正準方程式 ${}_*\rho^i = 0$, ${}_*\theta_i = 0$ が導かれる．

（証明終わり）

この証明で，A_{ij} が正則でないとき，(4-3-7) から (4-3-10) は導かれない．そのときは $T^*Q \times \boldsymbol{R}$ において拘束条件 $\Phi_a(q, p, t) = 0$ が存在して，δp_i は独立でなくなるので，(4-3-5) からただちに正準方程式を得ることはできない．その場合の考察は第8章で詳しく展開する．

少なくとも A_{ij} が正則であれば，Hamilton の原理と Cartan の原理は同値であることが証明できた．非正則の場合も成り立つことが後に示される．

§4-4　基本1-形式の性質

次に，基本1-形式 $\boldsymbol{\Omega}$（あるいは変分形式 $\boldsymbol{\theta}$）に関する注目すべき特徴を説明しよう．$\boldsymbol{\Omega}$ の微分は運動方程式と結び付いていて，運動方程式

$$\rho^i = 0, \quad \theta_i = 0$$

上で

$$d\Omega = \theta_i \wedge \rho^i = 0$$

したがって，Poincaré の補題によって，Ω は積分可能となる．よって，運動方程式に従う経路 c 上に制限すると，基本 1-形式 Ω は積分可能であり，

$$d\Omega|_c = 0 \rightarrow \Omega|_c = dW \tag{4-4-1}$$

なる局所的関数 W が存在する．

位相空間でも当然

$$d_*\Omega|_{*c} = 0 \rightarrow {}_*\Omega|_{*c} = d_*W \tag{4-4-2}$$

となる．運動方程式に従う経路 ${}_*c$ 上では，運動方程式の解として p_i は $q^i(t)$ と t の関数として表されるから，${}_*W$ は q^i と t の関数と見なせる．すると，(4-4-2) は ${}_*c$ 上で

$$p_i dq^i - H(q, p, t)dt = \frac{\partial_* W(q, t)}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial_* W(q, t)}{\partial t} dt \tag{4-4-3}$$

となり，

$$p_i = \frac{\partial_* W(q, t)}{\partial q^i} \tag{4-4-4}$$

$$H\left(q, \frac{\partial_* W}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial_* W(q, t)}{\partial t} = 0 \tag{4-4-5}$$

を得る．これは，いわゆる Hamilton-Jacobi 方程式である．したがって (4-4-2) は Hamilton-Jacobi 方程式の主関数 ${}_*W$ の存在を保証するものである．

もう 1 つの Ω (および ${}_*\Omega$) の特徴は，Ω が一般に時間 t に依存するにもかかわらず，$d\Omega$ は c 上で t および dt に無関係となり，したがって時間的に一定であるということである．ただし，この d は $TQ \times \boldsymbol{R}$ における外微分である．

それを証明するために，q^i, ξ^i の変化を独立パラメータ $u^1, u^2, \cdots, u^r$ と t によって表そう ($r \leq 2N$)；

$$\left.\begin{aligned} q^i &= q^i(u, t) \\ \xi^i &= \xi^i(u, t) \end{aligned}\right\} \tag{4-4-6}$$

拘束条件がなければ $r = 2N$ である．c に沿った変分を dt で表し，それ以外の c からはずれた変分は du^a ($a = 1, \cdots, r$) によって表すとしよう．すると運動方程式(4-3-10) は

$$\left.\frac{\partial q^i}{\partial t}\right|_u - \xi^i = 0 \tag{4-4-7 a}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}p_i(q,\xi,t)\right|_u-\frac{\partial L}{\partial q^i}=0 \tag{4-4-7 b}$$

となる．

他方，一般的変分に対して

$$\left.\begin{aligned} dq^i&=\frac{\partial q^i}{\partial u^\alpha}du^\alpha+\frac{\partial q^i}{\partial t}dt \\ d\xi^i&=\frac{\partial \xi^i}{\partial u^\alpha}du^\alpha+\frac{\partial \xi^i}{\partial t}dt.\end{aligned}\right\} \tag{4-4-8}$$

(4-4-7)，(4-4-8) を

$$d\Omega=\left(dp_i(q,\xi,t)-\frac{\partial L}{\partial q^i}dt\right)\wedge(dq^i-\xi^i dt)$$

に代入すると，dt の項はすべて消えて

$$d\Omega|_c=\frac{\partial p_i(q,\xi,t)}{\partial u^\alpha}\frac{\partial q^i}{\partial u^\beta}du^\alpha\wedge du^\beta \tag{4-4-9}$$

となる．これで，まず $d\Omega|_c$ が dt によらないことがわかった．次に t にもよらぬことを示す．そのために

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial p_i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial q^i}{\partial u^\beta}-\frac{\partial p_i}{\partial u^\beta}\frac{\partial q^i}{\partial u^\alpha}\right)\equiv B_{\alpha\beta}(u,t)=-B_{\beta\alpha}(u,t) \tag{4-4-10}$$

とおこう．$B_{\alpha\beta}$ は実は t によらない．なぜならば，$d^2=0$ によって*)

$$d(d\Omega|_c)=(d^2\Omega)|_c=\frac{\partial}{\partial t}B_{\alpha\beta}dt\wedge du^\alpha\wedge du^\beta+(dt\text{ のない項})=0$$

微分の各項は独立であるから，上式より $\partial B_{\alpha\beta}/\partial t|_c=0$．よって $d\Omega$ は c 上で t によらない；

$$d\Omega|_c=\text{時間的に一定}. \tag{4-4-11}$$

さらに，運動の経路管を1周する閉曲線 l を境界にもつ任意の曲面を σ とし，Stokesの定理を (4-3-4) に適用すると

$$\int_\sigma d\Omega=\text{一定} \tag{4-4-12}$$

となる．この式は，1つの経路管を決めたとき，その経路管上に境界をもつ任意の

*) 第1章§1-2で説明したように，外微分 d と写像 ϕ^* とは交換可能であるから，c 上に制限することと外微分とは可換である．$d(d\Omega|_c)=(d^2\Omega)|_c$．

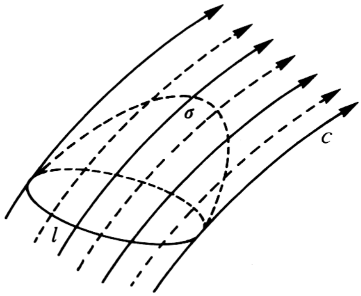


図 4-3

曲面について成り立つので絶対積分不変式という．

(4-4-12) は (4-4-11) からも容易に理解できる．なぜならば，$d\Omega$ は任意の運動経路に沿って一定値をとるから，経路管を $t=$一定 の平面で切った切断面 σ_0 上での積分値は，σ_0 と同一の境界をもち管の中に含まれる任意の曲面 σ 上での積分値と一致するからである（管の中を通る経路に沿って σ_0 を σ までずらせばよい）．

逆に (4-4-12) が任意の σ について成り立てば，経路管は任意にとりうるから，(4-4-11) が結論される．

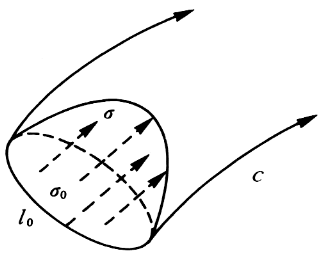


図 4-4

例 4-1　Maupertuis の原理

作用積分

$$J=\int_{t_1}^{t_2} p_i dq^i - E dt = \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

が停留値をとるとした Hamilton の原理の代わりに，

$$E=p_i \dot{q}^i - L = \text{一定}$$

とした条件つき変分

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} p_i\,dq^i = 0$$

がMaupertuisの原理である.

第5章　正　準　理　論

§ 5-1　正準方程式の数学的構造

位相空間 T^*Q はシンプレクティク多様体であることを§4-1で述べた．この節では正準方程式をシンプレクティク多様体の観点から見てみよう．

正準方程式は，行列の形式で

$$\begin{pmatrix} \dot{q}^i \\ \dot{p}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial q^i} \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \end{pmatrix} \equiv -J \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial q^i} \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \end{pmatrix} \tag{5-1-1}$$

と書ける．上式で，左辺は $2N$ 成分をもつ縦行列とする．また，I は（$N\times N$）単位行列である．§3-2で導入した運動を生成するベクトル場

$${}_*X_t = \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{\partial}{\partial t} \tag{5-1-2}$$

は反対称行列 J を用いると

$${}_*X_t = \left(\frac{\partial H}{\partial q^i}, \frac{\partial H}{\partial p_i}\right) J \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial q^i} \\ \dfrac{\partial}{\partial p_i} \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial t} \tag{5-1-3}$$

と書き直せる．このことからわかるように，q^i, p_i をまとめて $2N$ 成分の行列で表す方が便利である．そこで

$$(q^1, \cdots, q^N, p_1, \cdots, p_N) = (z^1, \cdots, z^N, z^{N+1}, \cdots, z^{2N})$$

と表すことにする．正準方程式は，$\partial/\partial t$ はきかないから

$$\dot{z}^m = X_H z^m \qquad (m = 1, \cdots, 2N), \tag{5-1-4}$$

$$X_H=\left(\frac{\partial H}{\partial z^1},\cdots,\frac{\partial H}{\partial z^{2N}}\right)J\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial z^1}\\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial z^{2N}}\end{pmatrix} \tag{5-1-5}$$

となる*⁾. 太字 $\boldsymbol{X}_H$ はHに対する Hamilton ベクトル場である ((3-2-13) 参照).

T^*Q は (4-1-15) の 2-形式**⁾ $\omega=dq^i\wedge dp_i$ によって決まるシンプレクティク構造をもっている. T^*Q では ω が基本的役割を演ずる. まず, ω を用いて, $T(T^*Q)$ におけるベクトル場の積の表現を求めておこう.

$T(T^*Q)$ における 2 つの任意のベクトル場を

$$\left.\begin{aligned} v_1&=x_1{}^i\frac{\partial}{\partial q^i}+y_1{}^i\frac{\partial}{\partial p_i}\equiv u_1{}^m\frac{\partial}{\partial z^m}\\ v_2&=x_2{}^i\frac{\partial}{\partial q^i}+y_2{}^i\frac{\partial}{\partial p_i}\equiv u_2{}^m\frac{\partial}{\partial z^m}\end{aligned}\right\} \tag{5-1-6}$$

とし, 2-形式 ω との内積を求める. 反対称行列 $J_{mn}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ を用いると

$$\omega=dq^i\wedge dp_i=\frac{1}{2}dz^m\wedge J_{mn}dz^n \qquad (m,n=1,\cdots,2N) \tag{5-1-7}$$

となるから,

$$\omega(v_1,v_2)=dq^i(v_1)dp_i(v_2)-dq^i(v_2)dp_i(v_1)=x_1{}^iy_{2i}-x_2{}^iy_{1i} \tag{5-1-8}$$

は次のように表される.

$$\begin{aligned}\omega(v_1,v_2)&=\frac{1}{2}dz^m(v_1)J_{mn}dz^n(v_2)-\frac{1}{2}dz^m(v_2)J_{mn}dz^n(v_1)\\ &=dz^m(v_1)J_{mn}dz^n(v_2)=u_1{}^mJ_{mn}u_2{}^n\end{aligned} \tag{5-1-9}$$

(5-1-8) と (5-1-9) によって, $2N$ 次元 T^*Q 空間における一種のひずみ対称積を導入したことになる. これは Euclid 空間の内積

$$\langle v_1,v_2\rangle=u_1{}^m\delta_{mn}u_2{}^n=\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_2$$

に対応するものである.

この (5-1-8), (5-1-9) を用いて, Hamilton ベクトル場 $\boldsymbol{X}_H$ とHの関係を求め

---

*) 位相空間と状態空間の量を区別するために, 位相空間の量の左下に * 印をつけてきたが, 本章では位相空間の量のみ扱うので * 印を省略する.

**) そこでは ω_2 と記したが, 本節では $\omega\,(=-\omega_2)$ と記す.

よう．

$$X_H=\frac{\partial H}{\partial z^m}J^{mn}\frac{\partial}{\partial z^n},\quad J^{mn}=\begin{pmatrix}0 & -I\\ I & 0\end{pmatrix} \tag{5-1-10}$$

と書けるから，v_1, v_2 として X_H と任意のベクトル場 v をとると，

$$\omega(X_H, v)=\frac{\partial H}{\partial z^m}J^{mn}J_{nl}u^l=\frac{\partial H}{\partial z^m}u^m$$

$$=\frac{\partial H}{\partial q^i}x^i+\frac{\partial H}{\partial p_i}y^i=dH(v) \tag{5-1-11}$$

を得る．この式は任意の v について成り立つので，v をはずしてよい．すると

$$dH=\omega(X_H)=\frac{1}{2}dz^m(X_H)J_{mn}dz^n-\frac{1}{2}dz^mJ_{mn}dz^n(X_H)$$

$$=dz^m(X_H)J_{mn}dz^n=(X_Hz^m)J_{mn}dz^n \tag{5-1-12}$$

となる．上式で $J_{mn}=-J_{nm}$ を用いた．これがHと X_H の関係であるが，この式は，2-形式 ω によってベクトル場 X_H が 1-形式 dH に変換されることを意味する．逆に，この対応が 1 対 1 ならば，ω によってHから X_H を定義するものとも解釈される．X_H は T^*Q の中で運動を生成する演算子であるから，X_H によって生成される正準方程式も，T^*Q がシンプレクティク多様体であることを示唆している．

§ 5-2　ベクトル場と 1-形式の対応

ω を媒介とする dH と X_H の関係（5-1-12）は一般化されて，任意のベクトル場と 1-形式に拡張される．しかも，その写像は 1 対 1 であることが示される．いま任意のベクトル場を

$$X=u^m\frac{\partial}{\partial z^m}=x^i\frac{\partial}{\partial q^i}+y_i\frac{\partial}{\partial p_i} \tag{5-2-1}$$

とし，対応する 1-形式を ξ で表すと，(5-1-9) によって*)

$$\xi=\omega(X)\equiv i_X\omega=u^mJ_{mn}dz^n=-y_idq^i+x^idp_i \tag{5-2-2}$$

言い換えれば，任意のベクトル場Yに対して（5-1-11）と同様に

$$\omega(X, Y)=\xi(Y)=\langle\xi, Y\rangle \tag{5-2-3}$$

によって 1-形式 ξ を定義するのである．

*）記号 i_X はベクトル場Xと微分形式との内積を表す．内積を $\omega(X)$ や $i_X\omega$ で表す（第 1 章§1-3参照）．

逆に，任意の1-形式

$$\eta = u_m dz^m = a_i dq^i + b^i dp_i \tag{5-2-4}$$

が与えられたとき，η に対応するベクトル場が1つ決まる．それを Y とする．すると

$$\omega(Y) = i_Y \omega = \eta \tag{5-2-5}$$

が成り立つ．Y が一義的に決まることは次のようにしてわかる．Y を

$$Y = \bar{u}^m \frac{\partial}{\partial z^m} = \bar{a}^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \bar{b}_i \frac{\partial}{\partial p_i}$$

とおくと，(5-2-4)，(5-2-5) から

$$i_Y \omega = \bar{u}^m J_{mn} dz^n = u_n dz^n$$

となる．よって

$$u_n = \bar{u}^m J_{mn} = -J_{nm} \bar{u}^m,$$

$$\therefore \quad \bar{a}^i = b^i, \quad \bar{b}_i = -a_i$$

を得る．

結局，(5-2-2) はベクトル場 X と1-形式 ξ との1対1写像を与える；

$$\omega \ : \ X = u^m \frac{\partial}{\partial z^m} = x^i \frac{\partial}{\partial q^i} + y_i \frac{\partial}{\partial p_i} \iff \xi = u^m J_{mn} dz^n = -y_i dq^i + x^i dp_i. \tag{5-2-6}$$

この写像において，$\partial/\partial p_i, dq^i$ の係数の符号が互いに逆になっていることに注意されたい．それは，正準方程式，すなわち行列 $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ に負符号が入った理由と同一である．このことはシンプレクティク形式 ω がひずみ対称であることに原因がある．位相空間はシンプレクティク多様体であるから，この負符号は本質的なものである．

(5-1-12) では $\omega(X_H)$ は全微分 dH になったが，一般のベクトル場 X に対する ξ は，(5-2-6) からわかるように，全微分の形になっていないことに注意されたい．ξ が全微分 dg になるのは，もとのベクトル場が Hamilton ベクトル場のときである．それについては後述する．

ここまでの話では，シンプレクティク構造 ω を (5-1-7) の表式に限ってきたが，ω はそれに限定する必要はない．変数変換を行い新変数を $y^m(z)$ とすると，2-形式 ω は一般に

$$\omega = \frac{1}{2}\,\omega_{mn}\,dy^m \wedge dy^n, \tag{5-2-7}$$

$$\omega_{mn} = -\,\omega_{nm} \tag{5-2-8}$$

の形となる．以後特に断らない限り，y^m は正準変数（q^i, p_i）とは限らない．

ここで（5-1-7）の ω を忘れ，改めて話を一般的な 2-形式（5-2-7），（5-2-8）から出発する．そして，y^m は正準変数 q^i, p_i と必ずしも結び付いているとは限らないとする．一般に，多様体M上で（5-2-7），（5-2-8）によって 2-形式 ω が与えられたとき，ω_{mn} が正則

$$\det(\omega_{mn}) \neq 0 \qquad (m, n = 1, \cdots, 2N) \tag{5-2-9}$$

で，かつ ω が閉じている，すなわち

$$d\omega = 0 \tag{5-2-10}$$

ならば，ω をM上のシンプレクティク形式といい，(M, ω) によって決まる多様体をシンプレクティク多様体という．ω_{mn} が正則であるとき，ω は非退化であるという．

第 1 章§1-4 の Darboux の定理によると，任意の閉 2-形式 ω は独立変数をうまくとることにより，局所的に

$$\omega = d\eta^k \wedge d\zeta^k \qquad (k = 1, \cdots, N - r \leq N) \tag{5-2-11}$$

の形に必ず書ける．ここに η^k, ζ^k は y^m の独立関数である．一般に $r \geq 0$ であるが，ω_{ij} が非退化のとき $r = 0$ であって，独立変数の数は減少しない．これは大変重要な結果である．（5-2-7）の非退化な閉 2-形式 ω は，局所的には必ず（5-1-7）の形に変形できる．つまり，正準変数 $z^m = (q^i, p_i)$ が存在してシンプレクティク構造は正準座標を用いて

$$\omega = dq^i \wedge dp_i \tag{5-2-12}$$

によって表される．

この結果から，任意の非退化な閉 2-形式 ω によって，先に述べた，ベクトル場と 1-形式との 1 対 1 写像を定義できることがわかる．任意のベクトル場Xを

$$X = u^m \frac{\partial}{\partial y^m} \tag{5-2-13}$$

で与えると，（5-2-7）の ω によってXは 1-形式

$$\xi = i_X\,\omega = u^m \omega_{mn}\,dy^n \tag{5-2-14}$$

に写像される．ω は非退化であるから，ω_{mn} の逆行列 ω^{mn} が存在する；

$$\omega_{ml}\,\omega^{ln} = \delta_m{}^n$$

よって逆写像 $\xi \to X$ も存在する．すなわち

$$\xi = u_m dy^m \tag{5-2-15}$$

とおけば

$$u_m = -\omega_{mn} u^n, \quad u^m = -\omega^{mn} u_n \tag{5-2-16}$$

となり，(5-2-13) のXが決まる．特別な場合として y^m が正準座標ならば

$$\omega_{mn} = J_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \tag{5-2-17}$$

である．

(5-2-16) からわかるように，ω による写像は反変ベクトル u^m と共変ベクトル u_m の対応を与えることである．したがって，ω_{mn} と ω^{mn} は計量空間における計量テンソル g_{ij} と g^{ij} の役目をしているわけである．以上のことから，位相空間つまりシンプレクティク多様体では，1-形式を与えることと，ベクトル場を与えることとは同値であることが結論される．

次に，完全 1-形式と Hamilton ベクトル場の関係を述べる．T^*Q における任意関数 $f(z)$ に対して，$T^*(T^*Q)$ 上の 1-形式 $df(z)$ が定まる．すると ω によって $T(T^*Q)$ 上のベクトル場が 1 つ決まる．それを X_f で表す．これは f に対応する Hamilton ベクトル場である．すなわち，完全微分 1-形式に対応するベクトル場が Hamilton ベクトル場というわけである．それを以下に示そう．

$$df = \frac{\partial f}{\partial z^m} dz^m \tag{5-2-18}$$

であるから，$u_m \to \partial f / \partial z^m$ と置き換えて，(5-2-13)，(5-2-16) から

$$X_f = \frac{\partial f}{\partial z^m} J^{mn} \frac{\partial}{\partial z^n} \tag{5-2-19}$$

を得る．正準変数でこれを記すと次のようになる．

$$X_f = \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

これが (3-2-13) で与えた Hamilton ベクトル場の表式である．特に，f をHとしたものが正準運動方程式を生成する X_H であった．

最後に，シンプレクティク形式 ω が閉じていること，$d\omega = 0$ から帰結する重要な性質を導こう．位相空間 $T(T^*Q)$ 上のベクトル場が与えられたとき，対応する 1-形式 ξ が完全微分形式である必要十分条件は ω の Lie 微分を用いて表される．

$T(T^*Q)$ 上のベクトル場Xが与えられたとき，$T^*(T^*Q)$ 上の対応する 1-形式 ξ が完全微分形式である必要十分条件を求める．ベクトル場Xの Lie 微分 L_X を ω に作用させ，公式（1-3-17 b）を用いると

$$L_X\omega = i_X d\omega + di_X\omega \tag{5-2-20}$$

となる．ω は閉じているから，第 1 項は消えて

$$L_X\omega = di_X\omega. \tag{5-2-21}$$

Xが Hamilton ベクトル場ならば，その定義によって

$$i_X\omega = \xi = df \tag{5-2-22}$$

なる f が存在する．したがって，そのとき（5-2-21）の右辺は 0 となり

$$L_X\omega = 0 \tag{5-2-23}$$

となる．

逆に，(5-2-23) が成立すれば，(5-2-21) と Poincaré の補題によって，局所的に (5-2-22) を満たす f が存在する．このことから，次のように局所的 Hamilton ベクトル場を定義できる．

位相空間 T^*Q 上の各点 $\mathrm{R}(q^i, p_i)$ に対して R の近傍 U が定まり，U 上でベクトル場 $X \in T(T^*Q)$ が Hamilton ベクトル場であるとき，X を局所的 Hamilton ベクトル場という．

この定義と，上の結論とから，ベクトル場Xが局所的 Hamilton ベクトル場であることと，$i_X\omega$ が閉じていること，および（5-2-23）とはすべて同値である．すなわち

定理 5-1

$$d(i_X\omega) = 0 \iff L_X\omega = 0 \iff X\text{は局所的 Hamilton ベクトル場.} \tag{5-2-24}$$

Hamilton ベクトル場は明らかに局所的 Hamilton ベクトル場である；

$$\therefore \quad L_{X_f}\omega = 0. \tag{5-2-25}$$

例 5-1

正準運動方程式を一般の局所座標 y^m と（5-2-7）の ω とで表現してみよう．1-形式 ξ として

$$dH = \frac{\partial H}{\partial y^m} dy^m \qquad (m = 1, \cdots, 2N) \tag{5-2-26}$$

をとると，(5-2-19) によって

$$\boldsymbol{X}_H=\frac{\partial H}{\partial y^m}\,\boldsymbol{\omega}^{mn}\frac{\partial}{\partial y^n} \tag{5-2-27}$$

であるから，正準方程式は

$$\dot{y}^m=\boldsymbol{X}_H y^m=\frac{\partial H}{\partial y^n}\,\boldsymbol{\omega}^{nm}=-\boldsymbol{\omega}^{mn}\frac{\partial H}{\partial y^n} \tag{5-2-28}$$

となる．

例 5-2

位相空間における運動の生成系

$$X_t=\boldsymbol{X}_H+\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i}-\frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}+\frac{\partial}{\partial t}$$

の Lie 微分を基本 1-形式 $\boldsymbol{\Omega}$ に作用させると*)，

$$\begin{aligned} L_{X_t}\boldsymbol{\Omega}&=X_t(p_i)dq^i+p_i d(X_t q^i)-\boldsymbol{X}_H H dt-Hd(X_t t)\\ &=-\frac{\partial H}{\partial q^i}dq^i+p_i d\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)=d\left(p_i\frac{\partial H}{\partial p_i}-H\right). \end{aligned} \tag{5-2-29}$$

したがって，$L_{X_t}\boldsymbol{\Omega}$ は完全微分形式であるから

$$L_{X_t}d\boldsymbol{\Omega}=d(L_{X_t}\boldsymbol{\Omega})=0 \tag{5-2-30}$$

これは，$d\boldsymbol{\Omega}$ の定常性 (4-4-11) に相当する．

例 5-3

$f(z^m)$ の Hamilton ベクトル場 $\boldsymbol{X}_f$ と 1-形式 df の内積は，(5-2-19) により

$$i_{\boldsymbol{X}_f}df=df(\boldsymbol{X}_f)=\frac{\partial f}{\partial z^m}\,\boldsymbol{\omega}^{mn}\frac{\partial f}{\partial z^n}=0.$$

上式で $\boldsymbol{\omega}^{mn}$ の反対称性を用いた．したがって，$\boldsymbol{X}_f$ と df は直交する．

Lie 微分も

$$L_{\boldsymbol{X}_f}f=\boldsymbol{X}_f f=df(\boldsymbol{X}_f)=0,\quad L_{\boldsymbol{X}_f}df=d(\boldsymbol{X}_f f)=0$$

となる．

例 5-4

シンプレクティク構造 $\boldsymbol{\omega}$ は閉形式であるから，(5-2-7) より

---

*) H は t を陽に含まないとしているが，t による場合も同じ結果を得る．

$$d\omega=\frac{1}{2}\frac{\partial\omega_{mn}}{\partial y^l}dy^l\wedge dy^m\wedge dy^n=0.$$

これより

$$\frac{\partial\omega_{mn}}{\partial y^l}+\frac{\partial\omega_{lm}}{\partial y^n}+\frac{\partial\omega_{nl}}{\partial y^m}=0 \tag{5-2-31}$$

を得る．

§ 5-3　Poisson の括弧式

位相空間 T^*Q 上で定義された実数値関数 $f(q,p)=f(z)$ を力学量と呼ぶ．f が時間を陽に含んでいるときは $T^*Q\times\boldsymbol{R}$ 上の関数である．$f(z,t)$ の運動は正準方程式を用いて

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial q^i}\dot{q}^i+\frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i+\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q^i}+\frac{\partial f}{\partial t} \tag{5-3-1}$$

となる．右辺の $\partial/\partial t$ を除いた２項を

$$\{f,H\}\equiv\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q^i}=-\frac{\partial f}{\partial z^m}J^{mn}\frac{\partial H}{\partial z^n} \tag{5-3-2}$$

とおき，f と H の Poisson 括弧式（以下 P.b. と略記する）という．J^{mn} は J_{mn} の逆行列である．すると（5-3-1）は

$$\frac{df}{dt}=\{f,H\}+\frac{\partial H}{\partial t} \tag{5-3-3}$$

と表される．P.b. は正準理論ではきわめて重要なものである．

$T^*Q\times\boldsymbol{R}$ 上の２つの力学量 $f(q,p,t)$，$g(q,p,t)$ に対しても，f と g の P.b. は次式によって与えられる；

$$\{f,g\}\equiv\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i}=-\frac{\partial f}{\partial z^m}J^{mn}\frac{\partial g}{\partial z^n} \tag{5-3-4}$$

P.b. は，Hamilton ベクトル場の表式からわかるように，Hamilton ベクトル場によって表される．

$$\boldsymbol{X}_f=\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i}-\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}=\frac{\partial f}{\partial z^m}J^{mn}\frac{\partial}{\partial z^n}$$

であるから

$$\{f,g\}=-\boldsymbol{X}_f g=-dg(\boldsymbol{X}_f) \tag{5-3-5}$$

となる．しかるに，(5-2-22) によって

$$i_{X_g}\omega = dg \tag{5-3-6}$$

であるから，結局

$$\{f, g\} = -i_{X_g}\omega(X_f) = -\omega(X_g, X_f) = \omega(X_f, X_g) \tag{5-3-7}$$

を得る．このように，P. b. はシンプレクティク構造 ω により，2つの Hamilton ベクトル場の反対称内積で定義されることがわかった．

以上の P. b. は，正準座標を用いた定義であるが，一般の座標 $y^m(z)$ と，それに対応するシンプレクティク構造 ω の表式に拡張される．

$$\omega = \frac{1}{2}\omega_{mn}dy^m \wedge dy^n, \quad \omega_{mn} = J_{kl}\frac{\partial z^k}{\partial y^m}\frac{\partial z^l}{\partial y^n} \tag{5-3-8}$$

となるから，(5-3-7) と同様に

$$\{f, g\} = -\frac{\partial f}{\partial y^m}\omega^{mn}\frac{\partial g}{\partial y^n} = -i_{X_g}\omega(X_f) = \omega(X_f, X_g) \tag{5-3-9}$$

を得る．ただし

$$X_f = \frac{\partial f}{\partial y^m}\omega^{mn}\frac{\partial}{\partial y^n}, \quad \omega^{ml}\omega_{ln} = \delta_n{}^m \tag{5-3-10}$$

である．(5-3-7) と，(5-3-9) を比較すれば，P.b. は座標系によらない量であることがわかる．

ω^{mn} は反対称であるから，明らかに

$$\{f, g\} = -\{g, f\} \tag{5-3-11}$$

また，f, g として y^m, y^n をとれば

$$\{y^m, y^n\} = -\omega^{mn} \tag{5-3-12}$$

を得る．さらに局所座標系として正準座標をとれば，$\omega^{mn} = J^{mn}$ より

$$\{z^m, z^n\} = -J^{mn} \tag{5-3-13 a}$$

あるいは

$$\left.\begin{aligned} &\{q^i, p_j\} = \delta_j{}^i \\ &\{q^i, q^j\} = \{p_i, p_j\} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5-3-13 b}$$

となる．(5-3-4) と (5-3-13) を正準 Poisson 括弧といい，それに対して，(5-3-9)，(5-3-12) を一般化された Poisson 括弧と呼ぶ場合がある．(5-3-12) あるいは (5-3-13) が知れればすべての力学量の P.b. は計算できるから，それらが基本形である．

正準座標は当然正準 P.b. を満たすが，その逆も成り立つ．すなわち，局所座標 y^m

が正準 P.b. を満たすならば，その座標 y^m は正準座標 $z^m=(q^i, p_i)$ であることは (5-3-12) と (5-3-13) からわかる．なぜならば，この場合

$$\omega^{mn}=J^{mn} \qquad \text{だから} \qquad \omega_{mn}=J_{mn}=\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

を得，ω は正準変数のシンプレクティク構造 (5-1-7) となるからである．

P.b. は Hamilton ベクトル場を用いないで，シンプレクティク構造 ω の乗積によって定義することもできる．理解しやすいように，まず正準座標で考えよう．

$$\omega=dq^i\wedge dp_i$$

のとき，$2N$ を位相空間の次元とすると

$$\omega^N=\prod_{i=1}^{N}(dq^i\wedge dp_i)=N!(dq^1\wedge dp_1)\wedge\cdots\wedge(dq^N\wedge dp_N) \tag{5-3-14}$$

$$\omega^{N-1}=(N-1)!\sum_{r=1}(dq^1\wedge dp_1)\wedge\cdots\wedge\overline{(dq^r\wedge dp_r)}\wedge\cdots\wedge(dq^N\wedge dp_N) \tag{5-3-15}$$

となる．ただし，上式で $\overline{(dq^r\wedge dp_r)}$ はこの因子を除くことを意味する (2 重添字 r の和はとらない)．すると，P.b. は次のように表されることになる；

$$\{f, g\}\omega^N=Ndf\wedge dg\wedge\omega^{N-1} \tag{5-3-16}$$

実際に，(5-3-4) の表式がこの式を満たすことを示そう．(5-3-5) と (5-3-7) により，

$$\{f, g\}\omega^N=-dg(\boldsymbol{X}_f)\omega^N=-(i_{X_f}dg)\omega^N \tag{5-3-17}$$

しかるに，$2N$ 次元空間において，$(2N+1)$-形式は恒等的に 0 であるから，

$$dg\wedge\omega^N=0$$

したがって，

$$0=i_{X_f}(dg\wedge\omega^N)=(i_{X_f}dg)\omega^N-dg\wedge(i_{X_f}\omega^N) \tag{5-3-18}$$

より，

$$(i_{X_f}dg)\omega^N=dg\wedge(i_{X_f}\omega^N)=dg\wedge\sum_{r=1}^{N}\omega^{r-1}\wedge(i_{X_f}\omega)\wedge\omega^{N-r}$$

$$=dg\wedge Ndf\wedge\omega^{N-1}=-Ndf\wedge dg\wedge\omega^{N-1} \tag{5-3-19}$$

を得る．こうして，(5-3-17) と (5-3-19) から (5-3-16) が成り立つ．

以上の証明は，座標系によらない量のみでなされているから，ω として一般座標を用いた (5-3-8) に対しても同様に成り立つ．したがって，(5-3-16) をもって，

P.b. の定義としうる．

P.b. は，力学系を正準量子化する際に，古典論から量子論への橋渡しをすることはよく知られている．その手続きは，力学量を Hermite 演算子で置き換え，P.b. を交換関係で置き換える．それゆえ，古典力学を P.b. で表現し，その性質を調べるということは有益である．

そこで，P.b. の満たす重要な性質を列記しておく．y^m の関数 f, g に対して，

(i) $$\{f, g\} = -\{g, f\} \tag{5-3-20 a}$$

(ii) c_1, c_2 を定数として

$$\{f, c_1 g_1 + c_2 g_2\} = c_1\{f, g_1\} + c_2\{f, g_2\} \tag{5-3-20 b}$$

(iii) Jacobi の恒等式

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0 \tag{5-3-20 c}$$

(iv) $$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\} \tag{5-3-20 d}$$

(v) F が f_α $(\alpha = 1, \cdots, n)$ の関数のとき

$$\{F, g\} = \frac{\partial F}{\partial f_\alpha}\{f_\alpha, g\} \tag{5-3-20 e}$$

性質(i)，(ii)，(iii)は，力学量の全体が，P.b. に関して Lie 環をなすことを示している．Lie 環とは，性質(i)，(ii)のように線形で，かつ反対称な演算 $L \times L \to L$ が定義され，そしてその演算が Jacobi の恒等式（3つの量の間の2重演算の循環和）を満たす線形空間 L のことである．

次にこれら諸性質の証明をする．(i)は，すでに述べたように，定義から明らかである．(ii)，(iv)，(v)を示すために，P.b. が（5-3-5），（5-3-7）によって

$$\{f, g\} = \omega(\boldsymbol{X}_f, \boldsymbol{X}_g) = -\boldsymbol{X}_f\, g = \boldsymbol{X}_g\, f \tag{5-3-21}$$

と書けることに注意しよう．このように P.b. は Hamilton ベクトル場によって微分作用素として表現されるから，(ii)，(iv)，(v)は明らかである．最後に(iii)を証明する．(iii)は P.b. の定義を用いて，直接計算をすれば導けるが，ここではこれまでの外微分の理論を使って示そう．

そのために，まず有用な公式

$$[\boldsymbol{X}_f, \boldsymbol{X}_g] = -\boldsymbol{X}_{\{f, g\}} \tag{5-3-22}$$

を証明する．ここに右辺は P.b. $\{f, g\}$ に対する Hamilton ベクトル場である．これは P.b. と Hamilton ベクトル場の交換子積との関係を与えるものである．Lie 微分に関する公式（1-3-17 d）

$$i_{[X,Y]} = L_X i_Y - i_Y L_X$$

を用いると

$$i_{[\boldsymbol{X}_f, \boldsymbol{X}_g]}\,\boldsymbol{\omega} = L_{\boldsymbol{X}_f} i_{\boldsymbol{X}_g} \boldsymbol{\omega} - i_{\boldsymbol{X}_g} L_{\boldsymbol{X}_f} \boldsymbol{\omega} \tag{5-3-23}$$

を得る．(5-2-23) によって第 2 項は消える．さらに，Lie 微分と外微分の可換性に注意すると，上式は

$$\begin{aligned} i_{[\boldsymbol{X}_f, \boldsymbol{X}_g]}\,\boldsymbol{\omega} &= L_{\boldsymbol{X}_f} dg = d(L_{\boldsymbol{X}_f} g) = d(\boldsymbol{X}_f\, g) = -d\{f, g\} \\ &= -i_{\boldsymbol{X}_{\{f,g\}}}\boldsymbol{\omega} \end{aligned} \tag{5-3-24}$$

となる．ただし，(5-3-6) と (5-3-21) を用いた．$\boldsymbol{\omega}$ は非退化ゆえ，$\boldsymbol{\omega}_{mn}$ の逆が存在するので，(5-3-24) から (5-3-22) が得られる．

(5-3-22) を使えば，Jacobi 恒等式を導くのは容易である．(5-3-21)，(5-3-22) から

$$\begin{aligned} \{\{f, g\}, h\} &= -\boldsymbol{X}_{\{f,g\}}\, h = [\boldsymbol{X}_f, \boldsymbol{X}_g]\, h = \boldsymbol{X}_f(\boldsymbol{X}_g\, h) - \boldsymbol{X}_g(\boldsymbol{X}_f\, h) \\ &= -\boldsymbol{X}_f\{g, h\} + \boldsymbol{X}_g\{f, h\} = \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\} \end{aligned}$$

を得る．この式の右辺を P.b. の反対称性を用いて整頓すれば Jacobi 恒等式となる．

§ 5-4　Lagrange 括弧式および 1-形式の括弧式

P.b. と密接に関係している Lagrange 括弧を導入する．力学量 $g(z)$ に対して，次のベクトル場

$$X^g \equiv \frac{\partial}{\partial g} = \frac{\partial y^m}{\partial g} \frac{\partial}{\partial y^m} \tag{5-4-1}$$

を考える．これは，$2N$ 個の実関数 $g_m(z)$ $(m = 1, \cdots, 2N)$ を T^*Q の局所座標系とし，y^m を g_m によって表すことにより可能である．こうして定義されたベクトル場 X^f, X^g の反対称内積 $\boldsymbol{\omega}(X^f, X^g)$ をつくることにより，新たな括弧式 $[\![f, g]\!]$ を定義することができる；

$$[\![f, g]\!] \equiv \boldsymbol{\omega}(X^f, X^g) = \boldsymbol{\omega}\left(\frac{\partial}{\partial f}, \frac{\partial}{\partial g}\right) = \frac{\partial y^m}{\partial f}\, \omega_{mn} \frac{\partial y^n}{\partial g}. \tag{5-4-2}$$

この括弧式を Lagrange 括弧という．ω_{mn} の反対称性から当然

$$[\![f, g]\!] = -[\![g, f]\!] \tag{5-4-3}$$

である．

特に，f, g として y^m, y^n をとると

$$[\![y^m, y^n]\!] = \omega_{mn} \tag{5-4-4}$$

となる．さらに，正準座標系 $z^m=(q^i,p_i)$ を選ぶと，(5-4-1)，(5-4-2)，(5-4-4) はそれぞれ

$$X^g=\frac{\partial z^m}{\partial g}\frac{\partial}{\partial z^m}=\frac{\partial q^i}{\partial g}\frac{\partial}{\partial q^i}+\frac{\partial p_i}{\partial g}\frac{\partial}{\partial p_i}, \tag{5-4-5 a}$$

$$[\![f,g]\!]=\frac{\partial z^m}{\partial f}J_{mn}\frac{\partial z^n}{\partial g}=\frac{\partial q^i}{\partial f}\frac{\partial p_i}{\partial g}-\frac{\partial q^i}{\partial g}\frac{\partial p_i}{\partial f}, \tag{5-4-5 b}$$

$$[\![z^m,z^n]\!]=J_{mn} \tag{5-4-5 c}$$

となる．最後の式を q^i, p_i で記すと次のようになる；

$$[\![q^i,p_j]\!]=\delta_j{}^i,\quad [\![q^i,q^j]\!]=[\![p_i,p_j]\!]=0. \tag{5-4-6}$$

(5-4-4) は Lagrange 括弧と P.b. との関係を明らかにしている．P.b. は(5-3-12) によって与えられたが，$\boldsymbol{\omega}^{mn}$ と $\boldsymbol{\omega}_{mn}$ とは互いに逆行列の関係にあるから

$$\sum_l\{y^m,y^l\}[\![y^l,y^n]\!]=-\delta^{mn} \tag{5-4-7}$$

を得る．つまり，$\{y^m,y^n\}$ と $[\![y^m,y^n]\!]$ とを行列要素と見るとき，それらのつくる行列は符号を除き，逆行列の関係にある．これは注目すべき性質である．Poisson および Lagrange 括弧は，シンプレクティク変換（正準変換）のもとでの不変式として重要な意味をもつことを次節で説明する．

次に，P.b. の拡張ともいうべき，1-形式に関する Lie 環がつくれることを示そう．これまでのところ，Poisson，Lagrange 括弧は位相空間 T^*Q 上の実関数に対して定義された．しかし，P.b. の性質(i)，(ii)，(iii)の形式を満たすもの，つまり Lie 環をなすものを，$T^*(T^*Q)$ 上の 1-形式に対してもつくることができる．

(5-3-22) は Hamilton ベクトル場の交換子積と P.b. の関係を与えるものと見ることができる．$T^*(T^*Q)$ 上の 1-形式と，$T(T^*Q)$ 上のベクトル場は $\boldsymbol{\omega}$ を媒介として 1 対 1 に対応していることを§5-2 で述べた．(5-3-22)を 1-形式に写像すれば

$$\boldsymbol{\omega}([\boldsymbol{X}_f,\boldsymbol{X}_g])=-d\{f,g\} \tag{5-4-8}$$

となり，ベクトル場の交換関係と 1-形式の関係を得る．この対応を Hamilton ベクトル場に限らず一般のベクトル場と 1-形式に拡張してみよう．

1-形式に関する Lie 環をつくるには，ベクトル場が Lie 環をつくる事実を利用するのがよい．ベクトル場の関係式を $\boldsymbol{\omega}$ を用いて 1-形式に移せばよいからである．

位相空間 $\boldsymbol{P}$ 上のベクトル場の全体 $\mathfrak{X}(\boldsymbol{P})$ は交換子積によって Lie 環をつくる．すなわち，$X,Y,Z\in\mathfrak{X}(\boldsymbol{P})$ とすると

(1) $[X, Y]=-[Y, X]$ (5-4-9 a)

(2) $[X, c_1 Y+c_2 Z]=c_1[X, Y]+c_2[X, Z]$ (5-4-9 b)

(3) $[[X, Y], Z]+[[Y, Z], X]+[[Z, X], Y]=0$ (5-4-9 c)

c_1, c_2 は定数である．

ベクトル場Xと 1-形式ξ間の変換を行うとき，記号を単純化して，次のように記すことにする．

$$i_X\omega=\xi \qquad \text{のとき} \qquad \begin{cases}\xi=X^\flat \\ X=\xi^\#\end{cases} \tag{5-4-10}$$

すなわち，$\flat$ は $T(T^*Q)$ から $T^*(T^*Q)$ への写像であり，# はその逆写像とする．

ここで，ξ, η を 1-形式とし，対応するベクトル場 $\xi^\#, \eta^\#$ を用いて

$$\{\!\{\xi, \eta\}\!\}\equiv-[\xi^\#, \eta^\#]^\flat \tag{5-4-11}$$

によって定義される $\{\!\{\quad\}\!\}$ を 1-形式の括弧式と呼ぶことにする．右辺は，$\xi^\#$ と $\eta^\#$ の交換子積によってできるベクトル場を 1-形式に変換することを意味する．負符号は関数の P.b. との対応をうまくつけるためにつけた．すると，線形写像 $\flat$, # は 1 対 1 対応であるから，位相空間 $\boldsymbol{P}$ 上の 1-形式の全体 $\Xi(\boldsymbol{P})$ は(5-4-11)によって Lie 環をつくる[1]．

$$\left.\begin{array}{ll}(1^\circ) & \{\!\{\xi, \eta\}\!\}=-\{\!\{\eta, \xi\}\!\} \\ (2^\circ) & \{\!\{\xi, c_1\zeta+c_2\eta\}\!\}=c_1\{\!\{\xi, \zeta\}\!\}+c_2\{\!\{\xi, \eta\}\!\} \\ (3^\circ) & \{\!\{\xi, \{\!\{\zeta, \eta\}\!\}\}\!\}+\{\!\{\zeta, \{\!\{\eta, \xi\}\!\}\}\!\}+\{\!\{\eta, \{\!\{\xi, \zeta\}\!\}\}\!\}=0\end{array}\right\} \tag{5-4-12}$$

さらに $\{\!\{\quad\}\!\}$ は次の性質をもつ．

(4°) $\{\!\{\xi, \eta\}\!\}=-L_{\xi^\#}\eta+L_{\eta^\#}\xi+d(i_{\xi^\#}i_{\eta^\#}\omega)$ (5-4-13)

(5°) ξ, η が閉じていれば $\{\!\{\xi, \eta\}\!\}$ は完全微分である

(6°) f, g を P 上の関数とすると

$$d\{f, g\}=\{\!\{df, dg\}\!\}. \tag{5-4-14}$$

(4°)，(5°)，(6°) は便利な性質である．その証明は次のとおり．

(4°) の証明．公式 (1-3-17 b) において $X=\xi^\#$ とした

$$L_{\xi^\#}=di_{\xi^\#}+i_{\xi^\#}d \tag{5-4-15}$$

を $i_{\eta^\#}\omega$ に作用させる．そして，それを公式 (1-3-17 d)

$$[L_{\xi^\#}, i_{\eta^\#}]=i_{[\xi^\#, \eta^\#]} \tag{5-4-16}$$

$$i_{\xi^\#}\omega=\xi \tag{5-4-17}$$

と $d\omega=0$ を用いて変形すると次のようになる；

$$d(i_{\xi^\#}\, i_{\eta^\#}\, \omega) = L_{\xi^\#}\, i_{\eta^\#}\, \omega - i_{\xi^\#}\, d(i_{\eta^\#}\, \omega)$$
$$= L_{\xi^\#}\, \eta - i_{\xi^\#}(L_{\eta^\#}\, \omega - i_{\eta^\#}\, d\omega) = L_{\xi^\#}\, \eta - i_{\xi^\#}\, L_{\eta^\#}\, \omega$$
$$= L_{\xi^\#}\, \eta - L_{\eta^\#}\, i_{\xi^\#}\, \omega - i_{[\xi^\#,\, \eta^\#]}\, \omega$$
$$= L_{\xi^\#}\, \eta - L_{\eta^\#}\, \xi - [\xi^\#, \eta^\#]^\flat = L_{\xi^\#}\, \eta - L_{\eta^\#}\, \xi + \{\!\{\xi, \eta\}\!\}.$$

（証明終わり）

(5°)の証明．ξ が閉じていれば

$$L_X \xi = d i_X \xi + i_X d\xi = d i_X \xi.$$

よって(4°)を用いて

$$\{\!\{\xi, \eta\}\!\} = d(-i_{\xi^\#}\, \eta + i_{\eta^\#}\, \xi + i_{\xi^\#}\, i_{\eta^\#}\, \omega)$$ （証明終わり）

完全 1-形式は閉じているから，この性質(5°)により，閉 1-形式の括弧式は閉じていることがわかる．よって，閉 1-形式の全体および完全 1-形式の全体はそれぞれ 1-形式の括弧式に関して部分 Lie 環をつくる．

(6°)の証明．$(df)^\# = \boldsymbol{X}_f$ に注意すれば，(4°)により

$$\{\!\{df, dg\}\!\} = -L_{\boldsymbol{X}_f} dg + L_{\boldsymbol{X}_g} df + d(i_{\boldsymbol{X}_f} i_{\boldsymbol{X}_g} \omega)$$
$$= d(-L_{\boldsymbol{X}_f} g + L_{\boldsymbol{X}_g} f + i_{\boldsymbol{X}_f} i_{\boldsymbol{X}_g} \omega)$$
$$= d(\{f, g\} - \{g, f\} - \{f, g\}) = d\{f, g\}.$$

ただし，上式で

$$i_{\boldsymbol{X}_f} i_{\boldsymbol{X}_g} \omega = \omega(\boldsymbol{X}_g, \boldsymbol{X}_f) = \{g, f\}$$

を用いた． （証明終わり）

例 5-5

Lagrange 括弧を求めるとき，$g_m(z)$ を z^m について逆に解くことが大変複雑な場合，(5-4-5 b) を直接計算する代わりに，(5-4-7) の性質を利用して，P.b. を求め，その逆行列から Lagrange 括弧を算出することもできる．

また，座標変換 $y^m \to y^m(Y)$ によって ω の変換は

$$\omega = \frac{1}{2}\, \omega_{mn}\, dy^m \wedge dy^n \;\to\; \frac{1}{2}\, \omega_{mn} \frac{\partial y^m}{\partial Y^k} \frac{\partial y^n}{\partial Y^l}\, dY^k \wedge dY^l$$

$$= \frac{1}{2} [Y^m, Y^n] dY^m \wedge dY^n$$

となる．

例 5-6

1-形式の括弧式の性質(6°)を用いると，公式 (5-3-22) は簡単に導かれる．(5-4-11) の両辺に写像♯を作用させると

$$\{\!\{\xi, \eta\}\!\}^{\#} = -[\xi^{\#}, \eta^{\#}]$$

となるから，$\boldsymbol{X}_f = (df)^{\#}$ と(6°)によって

$$\boldsymbol{X}_{\{f,g\}} = (d\{f, g\})^{\#} = \{\!\{df, dg\}\!\}^{\#} = -[df^{\#}, dg^{\#}] = -[\boldsymbol{X}_f, \boldsymbol{X}_g]$$

§ 5-5 正 準 変 換

同一次元の 2 つのシンプレクティク多様体 $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{\omega})$ と $(\boldsymbol{P}', \boldsymbol{\omega}')$ の間の変換

$$(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{\omega}) \to (\boldsymbol{P}', \boldsymbol{\omega}')$$

を考える．位相空間における変換論は，正準方程式の解法や方程式の性質を分析するうえで非常な有効性を発揮する．位相空間 T^*Q における変換は $2N$ 個の変数 $z^m = (q^i, p_i)$ を独立変数として扱うから，配位空間 Q における座標変換（点変換）$q^i \to Q^i$ よりも広い．

$2N$ 変数をこみにして，変換

$$\phi : z^m = (q^i, p_i) \to Z^m = (Q^i, P_i)$$

を考えよう．しかし，q^i, p_i が独立であるといっても，その運動は正準方程式を満たさなければならないから，まったく任意ではありえない．あまり勝手な変換では Q^i, P_i が正準方程式を満たさなくなり，力学として興味がない．そこで，正準方程式を不変にする変換のみを考え，それを正準変換という．この節ではまず，正準変換の性質を調べよう．

正準方程式を表す Pfaff 形式は基本 1-形式 $\boldsymbol{\Omega}$ の外微分で与えられることを第 3 章 § 3-2 で述べた．つまり

$$d\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\theta}_i \wedge \boldsymbol{\rho}^i \tag{5-5-1}$$

$$\boldsymbol{\theta}_i = dp_i + \frac{\partial H}{\partial q^i}dt, \quad \boldsymbol{\rho}^i = dq^i - \frac{\partial H}{\partial p_i}dt \tag{5-5-2}$$

したがって，正準方程式の形を変えない正準変換は $d\boldsymbol{\Omega}$ の形を変えない変換である．変換後の基本 1-形式を

$$\boldsymbol{\Omega}' = P_i dQ^i - K(Q, P)dt \tag{5-5-3}$$

とすると，正準変換の満たすべき条件は

$$d\boldsymbol{\Omega} = d\boldsymbol{\Omega}' \tag{5-5-4}$$

となる．これを Ω の関係に直すと，$d^2=0$ ゆえ

$$\Omega=\Omega'+dW \tag{5-5-5}$$

を得る．W は任意関数である．(5-5-5) が正準変換の必要十分条件であることは容易にわかる．この条件は次のようにも書ける；

$$p_i\dot{q}^i-H(q,p,t)=P_i\dot{Q}^i-K(Q,P,t)+\frac{dW}{dt} \tag{5-5-6}$$

この表式は状態空間で見ると，Lagrange 関数 $L(q,\xi,t)$ と $L'(Q,\Xi,t)$ の関係となる．Lには時間の全微分の任意性があって，その項は運動方程式に寄与しなかった．(5-5-6) の dW/dt はその不定性によるものである．つまり，(5-5-6) はLに dW/dt を加えるような変換であるから，Lagrange 方程式，ひいては正準方程式の形を変えない変換というわけである．ただし，W は q^i, $Q^i(q,p)$ の関数であるから，状態空間では ξ^i を含む．

正準変換の満たすべき条件を微分形で表したが，積分形で表すことも可能である．$2N+1$ 次元 $T^*Q\times \boldsymbol{R}$ における任意の2次曲面を σ とし，その写像を Σ とすると，(5-5-4) より

$$\int_\sigma d\Omega(q,p,t)=\int_\Sigma d\Omega'(Q,P,t) \tag{5-5-7}$$

あるいは

$$\int_{\partial\sigma}{}_*\Omega(q,p,t)=\int_{\partial\Sigma}{}_*\Omega'(Q,P,t) \tag{5-5-8}$$

ここに $\partial\sigma$ は σ の境界である閉曲線 l を表す．このように積分不変式として正準変換を表すこともできる．

次に，正準変換の具体的な形を求める．(5-5-6) において，W を q^i と Q^i の関数とすると

$$\frac{dW}{dt}=\frac{\partial W}{\partial q^i}\dot{q}^i+\frac{\partial W}{\partial Q^i}\dot{Q}^i+\frac{\partial W}{\partial t} \tag{5-5-9}$$

である．(5-5-6) は恒等式であるから

$$p_i=\frac{\partial W}{\partial q^i},\quad P_i=-\frac{\partial W}{\partial Q^i} \tag{5-5-10 a}$$

$$K=H+\frac{\partial W}{\partial t} \tag{5-5-10 b}$$

を得る．これはWがq^iとQ^iの関数としたときの変換式であるが，Wは(q^i, p_i)と(Q^i, P_i)のそれぞれから1つずつとってできる4対の変数の組合せのどれを独立変数としてもよい．たとえば，q^i, P_iの関数とすると，(5-5-6) は

$$p_i\dot{q}^i - H = -Q^i\dot{P}_i - K + \frac{dW'(q, P, t)}{dt} \tag{5-5-11}$$

$$W' = W + Q^i P_i \tag{5-5-12}$$

と変形できる．すると，(5-5-11) と

$$\frac{dW'}{dt} = \frac{\partial W'}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial W'}{\partial P_i}\dot{P}_i + \frac{\partial W'}{\partial t}$$

とから

$$P_i = \frac{\partial W'}{\partial q^i}, \quad Q^i = \frac{\partial W'}{\partial P_i}, \quad K = H + \frac{\partial W'}{\partial t} \tag{5-5-13}$$

を得る．(5-5-12) は，変数をq^i, Q^iからq^i, P_iに移す Legendre 変換であることに注意しよう．

WやW'が与えられれば，正準変換が決まるので，W, W'は正準変換の母関数である．Wが時間を陽に含まなければ，$K=H$となり，単に変数の書き換えである．

母関数Wは正準変換を特徴づけるものであるが，時間を一定に保ったT^*QでのWの変化は

$$\begin{aligned} dW &= \frac{\partial W}{\partial q^i}dq^i + \frac{\partial W}{\partial Q^i}dQ^i \\ &= p_i dq^i - P_i dQ^i \end{aligned} \tag{5-5-14}$$

と表される．この外微分をとることにより

$$\omega = dq^i \wedge dp_i = dQ^i \wedge dP_i = \omega' \tag{5-5-15}$$

を得る．この結果は，正準変換はシンプレクティク構造を不変にする変換と定義できることを示している．これは(5-5-4)において$dt=0$としたものと一致する．

このように，正準変換を，$2N+1$次元多様体$T^*Q\times \boldsymbol{R}$における変換(5-5-4)として見ることもできるし，時間tをパラメータとして$2N$次元多様体T^*Qにおける変換 (5-5-15) と見ることもできる．後者の立場は，シンプレクティク構造ωを不変にする変換で，これをシンプレクティク変換という．それに対して，前者の立場は奇数次元空間の変換と見るので，シンプレクティク変換とは異質である．基本1-形式$_*\Omega$のように奇数次元からなる1-形式を接触構造といい，(5-5-4) あるいは

(5-5-5) を満たす変換を接触変換という*).

例 5-7 点 変 換

配位空間Qにおける変換（点変換）$q^i \to Q^i$；

$$q^i = q^i(Q)$$

は T^*Q における正準変換を引き起こす．その母関数は

$$W = -p_i q^i(Q)$$

で与えられる．そして

$$P_i = -\frac{\partial W}{\partial Q^i} = p_j \frac{\partial q^j}{\partial Q^i}, \quad q^i = -\frac{\partial W}{\partial p_i}$$

これを用いて

$$dP_i \wedge dQ^i = d\left(p_j \frac{\partial q^j}{\partial Q^i}\right) \wedge dQ^i = dp_j \frac{\partial q^j}{\partial Q^i} \wedge dQ^i + p_j \frac{\partial^2 q^j}{\partial Q^k \partial Q^i} dQ^k \wedge dQ^i$$

$$= dp_j \wedge \frac{\partial q^j}{\partial Q^i} dQ^i = dp_j \wedge dq^j$$

が確かめられる．

§ 5-6 シンプレクティク変換

シンプレクティク変換論は正準形式の基礎的な理論であるから，それについてもう少し詳しく考察してみよう．

同次元のシンプレクティク多様体（$\boldsymbol{P}, \omega_y$）と（$\boldsymbol{P}', \omega_Y$）をとる．$\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{P}'$ は同一多様体でもよい．ここに

$$\omega_y \equiv \frac{1}{2} \omega_{mn} dy^m \wedge dy^n \tag{5-6-1}$$

$$\omega_Y \equiv \frac{1}{2} \omega_{mn} dY^m \wedge dY^n \tag{5-6-2}$$

である．ω は閉じていて非退化であるとする．このとき微分可能な変換

$$\phi : y^m \to Y^m, \quad \phi^* \omega_Y = \omega_y$$

を一般にシンプレクティク変換という．ϕ^* は ϕ の逆写像である．いうまでもなく，

---

*) この名前の由来は，$2N+2$ 次元多様体のある点で，この多様体と接する $2N+1$ 次元超接平面を考え，この接平面をその点での接触要素といい，それが接触構造を与えることにある．

y^m, Y^m が正準座標ならば，$\omega_{mn}=J_{mn}$，したがって，正準変換は正準座標を用いたときのシンプレクティク変換である．

シンプレクティク変換を

$$Y^m=\phi^m(y) \tag{5-6-3}$$

で表すと，

$$\phi^* dY^m=\frac{\partial \phi^m}{\partial y^n}dy^n \equiv S^m{}_n(y)dy^n \tag{5-6-4}$$

となる．S^m_n は上式で定義されるものとする．すると

$$\phi^*\omega_Y=\frac{1}{2}(\phi^*\omega_{mn})(\phi^* dY^m)(\phi^* dY^n)=\frac{1}{2}\omega_{mn}(\phi(y))S^m{}_k S^n{}_l dy^k\wedge dy^l$$

$$=\frac{1}{2}(S^T\boldsymbol{\omega}S)_{mn}dy^m\wedge dy^n=\omega_y \tag{5-6-5}$$

ただし，S^T は S の転置行列を，$\boldsymbol{\omega}$ は行列（ω_{mn}）を表す．この式と（5-6-1）とより

$$\boldsymbol{\omega}=S^T\boldsymbol{\omega}S \tag{5-6-6}$$

を得る．これがシンプレクティク変換の満たすべき必要十分条件である．十分条件でもあることは上の導出から明らかである．（5-6-6）より

$$\det S=\pm 1 \tag{5-6-7}$$

この表式は直交変換 T の条件 $T^T\mathbf{1}\,T=\mathbf{1}$ に相応するものである．

正準座標の場合は

$$J=S^TJS,\quad J=\begin{pmatrix}0 & I\\ -I & 0\end{pmatrix}. \tag{5-6-8}$$

これを要素ごとに書き下すと

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial Q^i}{\partial q^j}\frac{\partial P_i}{\partial q^k}-\frac{\partial P_i}{\partial q^j}\frac{\partial Q^i}{\partial q^k}=0\\
&\frac{\partial Q^i}{\partial q^j}\frac{\partial P_i}{\partial p_k}-\frac{\partial P_i}{\partial q^i}\frac{\partial Q^i}{\partial p_k}=\delta_j{}^k\\
&\frac{\partial Q^i}{\partial p_j}\frac{\partial P_i}{\partial p_k}-\frac{\partial P_i}{\partial p_j}\frac{\partial Q^i}{\partial p_k}=0
\end{aligned}\right\} \tag{5-6-9}$$

を得る．もう 1 つの式は第 2 式と同じものであるから省略した．これらの式は（Q^i, P_i）空間で定義される Lagrange 括弧を用いて次のように表される；

$$[q^j, q^k]=[p_j, p_k]=0, \quad [q^j, p_k]=\delta_k{}^j. \tag{5-6-10}$$

Q^i, P^i に対しても当然，同様の式が成り立つから，正準変換は Lagrange 括弧を変えない変換であるということができる．

次に，シンプレクティク変換のもう1つの特徴は，位相空間における2つのベクトル場 v_1, v_2 の ω による反対称積 $\omega(v_1, v_2)$ を不変にするということである．実際に，

$$v_\alpha = u_\alpha{}^m \frac{\partial}{\partial y^m} \qquad (\alpha=1,2) \tag{5-6-11}$$

に対して，

$$\omega(v_1, v_2) = u_1{}^m \omega_{mn} u_2{}^n \tag{5-6-12}$$

である．変換 (5-6-3) により

$$\phi v_\alpha \rightarrow V_\alpha = U_\alpha{}^m \frac{\partial}{\partial Y^m} \tag{5-6-13}$$

となったとすると，

$$\phi v_\alpha = u_\alpha{}^m \frac{\partial Y^n}{\partial y^m} \frac{\partial}{\partial Y^n} = U_\alpha{}^n \frac{\partial}{\partial Y^n}$$

よって

$$U_\alpha{}^m = S^m{}_n u_\alpha{}^n \qquad (\alpha=1,2) \tag{5-6-14}$$

を得るから

$$\begin{aligned}\omega(V_1, V_2) &= U_1{}^m \omega_{mn} U_2{}^n = u_1{}^m (S^T \boldsymbol{\omega} S)_{mn} u_2{}^n = u_1{}^m \omega_{mn} u_2{}^n \\ &= \omega(v_1, v_2)\end{aligned} \tag{5-6-15}$$

が導かれる．

(5-6-15) を正準座標について陽に書き下すと，

$$v_\alpha = x_\alpha{}^i \frac{\partial}{\partial q^i} + y_{\alpha i} \frac{\partial}{\partial p_i} \qquad (i=1, \cdots, N)$$

としたとき

$$x_1{}^i y_{2i} - y_{1i} x_2{}^i = \text{一定} \tag{5-6-16}$$

となる．

シンプレクティク変換の基本型をあげておこう．§5-2 で示したように，非退化な閉 2-形式は Darboux の定理によって，局所正準座標系 (q^i, p_i) によって，

$$\omega = dq^i \wedge dp_i \tag{5-6-17}$$

の形に書ける．したがって，この $\boldsymbol{\omega}$ の形を不変にする正準変換が基本的なシンプレクティク変換である．変換 $(q^i, p_i)\to(Q^i, P_i)$ のうち最も基本の形は

$$W=\delta_{ij}q^iQ^j\ ;\ Q^i=p_i,\quad P_i=-q^i \tag{5-6-18}$$

である．この変換は明らかに $\boldsymbol{\omega}$ の形を不変にする．

正準変換（5-6-18）はもう少し一般化できる．添字の集合 $\{1,2,\cdots,N\}$ の部分集合

$$M\equiv\{1,2,\cdots,r\}\subset\{1,2,\cdots,N\}$$

をとり，次の変換を考えよう；

$$Q^i=\begin{cases}q^i & (i\notin M\text{ のとき}),\\ p_i & (i\in M\text{ のとき}),\end{cases}\qquad P_i=\begin{cases}p_i & (i\notin M\text{ のとき})\\ -q^i & (i\in M\text{ のとき}).\end{cases} \tag{5-6-19}$$

これも

$$\boldsymbol{\omega}=dq^i\wedge dp_i=dQ^i\wedge dP_i$$

を満たすことは容易にわかる．

最後に，無限小シンプレクティク変換について述べる．(5-2-23)で示したように，Hamilton ベクトル場 $\boldsymbol{X}$ による Lie 微分は $\boldsymbol{\omega}$ を不変にする．

$$L_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\omega}=0. \tag{5-6-20}$$

このことは，Hamilton ベクトル場を無限小生成演算子とする変換は $\boldsymbol{\omega}$ を不変にする，つまりシンプレクティク変換であることを示している．

実際に，次に示すように，位相空間において，無限小生成演算子 X が Hamilton ベクトル場ならば，$\boldsymbol{X}$ から生成される局所1パラメータ変換群

$$y^m(s)=e^{s\boldsymbol{X}}y^m(0) \tag{5-6-21}$$

は $\boldsymbol{\omega}$ を不変にする．ここに s はパラメータである．無限小変換

$$\boldsymbol{\phi}:\ y^m(s)\to Y^m=y^m(s+ds)$$

は ds の1次までとると

$$Y^m=y^m(s)+\boldsymbol{X}y^m(s)ds \tag{5-6-22}$$

シンプレクティク変換による $\boldsymbol{\omega}$ 不変性から

$$\boldsymbol{\phi}^*\boldsymbol{\omega}_Y=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_{mn}(y(s+ds))dy^m(s+ds)\wedge dy^n(s+ds)$$

$$=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_{mn}(y(s))dy^m(s)\wedge dy^n(s)=\boldsymbol{\omega}_y$$

となる．(5-6-22) を上式に代入して，ds の1次までとると

$$\boldsymbol{\omega}_{mn}(y)[d(\boldsymbol{X}y^m)\wedge dy^n+dy^m\wedge d(\boldsymbol{X}y^n)]+(\boldsymbol{X}\boldsymbol{\omega}_{mn})dy^m\wedge dy^n=0.$$

Lie 微分の定義により上式は

$$\boldsymbol{\omega}_{mn}L_{\boldsymbol{X}}(dy^m\wedge dy^n)+(L_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\omega}_{mn})dy^m\wedge dy^n=L_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\omega}=0$$

となる．よって (5-6-20) が成り立つ．また逆に (5-6-20) から $\boldsymbol{\omega}$ の不変性が導かれる．

ベクトル場 X, Y の Lie 微分の公式 (1-3-17 a)

$$[L_X, L_Y]=L_{[X,Y]} \tag{5-6-23}$$

により，$\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{Y}$ が Hamilton ベクトル場ならば $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}]$ もまた Hamilton ベクトル場である．なぜならば

$$L_{[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]}\boldsymbol{\omega}=L_{\boldsymbol{X}}L_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{\omega}-L_{\boldsymbol{Y}}L_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\omega}=0$$

だからである．すると Hamilton ベクトル場は部分 Lie 環をつくることになる (§5-2 参照)．よって次の定理を得る．

定理 5-2

位相空間の上で定義される Hamilton ベクトル場の全体によって生成される変換はシンプレクティク変換群をつくる．

§5-5 で正準変換の母関数 W を定義したが，無限小正準変換に対しても母関数が定義され，しかも Hamilton ベクトル場 $\boldsymbol{X}$ を与える関数によって表すことができる．無限小変換 (5-6-22) において，y^m を正準変数 $z^m(q^i, p_i)$，$\boldsymbol{X}_S$ を関数 $S(q,p)$ によってつくられるとすると

$$\boldsymbol{X}_S=\frac{\partial S}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i}-\frac{\partial S}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i} \tag{5-6-24}$$

によって生成される無限小変換は

$$\left.\begin{aligned} dq^i&=\boldsymbol{X}_S q^i ds=-\{S, q^i\}ds=\frac{\partial S}{\partial p_i}ds \\ dp_i&=\boldsymbol{X}_S p_i ds=-\{S, p_i\}ds=-\frac{\partial S}{\partial q^i}ds \end{aligned}\right\} \tag{5-6-25}$$

となる．この $S(q,p)$ を無限小正準変換の母関数という．

例 5-8

無限小シンプレクティク変換のうちで最も重要なものは，Hamilton 関数からつくられる Hamilton ベクトル場 $\boldsymbol{X}_H$ によって生成される変換である．すでに§5-1で説明したように，正準運動方程式は $\boldsymbol{X}_H$ によって生成される位相空間の中の流線の方程式である．(5-6-25)において，S としてHを，s として t をとれば，正準運動方程式を得る．それゆえ，次のようにいうことができる．

正準運動方程式は，位相空間において，時間 t をパラメータとし，$\boldsymbol{X}_H$ によって生成される無限小正準変換である．

例 5-9

シンプレクティク変換（5-6-19）はもう少し一般化される．1 次変換

$$Q^i = a_j{}^i q^j + b^{ij} p_j, \quad P_i = c_{ij} q^j + d_i{}^j p_j$$

がシンプレクティク変換であるための条件は，(5-6-9）によって

$$a_j{}^i c_{ik} - a_k{}^i c_{ij} = 0, \quad d_i{}^j b^{ik} - d_i{}^k b^{ij} = 0$$

$$a_j{}^i d_i{}^k - c_{ij} b^{ik} = \delta_j{}^k$$

である．特に $Q^i = aq^i + bp_i$，$P_i = cq^i + dp_i$ のときは

$$ad - cb = 1$$

となる．

§ 5-7　正準変換の不変式

正準変換は基本 2-形式を不変にする，あるいはシンプレクティク構造 $\boldsymbol{\omega}$ の形を不変にするから，いろいろな不変式がつくれる．

すでに（5-5-4）に示したように，

$$\boldsymbol{\Omega} = p_i dq^i - Hdt \qquad (5\text{-}7\text{-}1)$$

とすると，$d\boldsymbol{\Omega}$ は正準変換のもとで不変であるから，その積分形も不変である．

$$\int_\sigma d\boldsymbol{\Omega} = 一定. \qquad (5\text{-}7\text{-}2)$$

σ は拡張された位相空間 $T^*Q \times \boldsymbol{R}$ の中の任意の曲面である．(5-7-2)は積分公式により，σ の境界を $\partial\sigma$ として

$$\int_{\partial\sigma} \boldsymbol{\Omega} = 一定 \qquad (5\text{-}7\text{-}3)$$

とも書ける．正準運動方程式は t をパラメータとする微小正準変換であるから，運動の経路管を囲む任意の閉曲線 $\partial\sigma=l$ に対して，(5-7-3)は不変であるというのがCartan の原理に他ならない．

一般に，k 個の $d\Omega$ の外積を

$$(d\Omega)^k\equiv d\Omega\wedge d\Omega\wedge\cdots\wedge d\Omega$$

と書くことにすると

$$\int_{V_k}(d\Omega)^k=\text{一定}\qquad(k\leq N)\tag{5-7-4}$$

が成り立つ．ここに V_k は $T^*Q\times\boldsymbol{R}$ における $2k$ 次元領域である．$k>N$ のときは $(d\Omega)^k\equiv 0$ だから，上式は $k\leq N$ で意味をもつ．

次に，$d\Omega$ において dt を0とすると，シンプレクティク構造 ω を得るから，上の式は ω についても成り立つ．しかし，ω を不変にするシンプレクティク変換は，正準変換より広いから，さらに多くのことが導けるはずである．一般の

$$\omega=\frac{1}{2}\omega_{mn}dy^m\wedge dy^n\tag{5-7-5}$$

に対して，シンプレクティク変換のもとで

$$\int_{v_k}\omega^k=\text{一定}\tag{5-7-6}$$

が成り立つ．v_k は T^*Q における任意の $2k$ 次元領域である．さらに，ω は閉じているから，Poincaré の補題によって

$$d\omega=0\rightarrow\omega=d\lambda\tag{5-7-7}$$

なる1-形式 λ が局所的に存在する．すると，$d(\omega^k)=0$ であるから，(5-7-6) は

$$\int_{\partial v_k}\lambda\omega^{k-1}=\text{一定}\tag{5-7-8}$$

と書き直すことができる．正準座標では

$$\lambda=p_i dq^i\tag{5-7-9}$$

である．(5-7-4)，(5-7-6)は任意の領域について成り立つから，絶対積分不変式と呼ばれる．それに対し，(5-7-8) は境界（閉曲線や閉曲面）でしか成立しないので相対積分不変式といわれる．

(5-7-6) において，$k=1$ のときが Poincaré の積分不変式であり，$k=N$ のときは，位相空間の体積が不変であることを示す．特に正準変換として正準運動方程式をと

ると，位相空間の体積は運動のもとで変わらないという Liouville の定理を得る；

$$\int \prod_{i=1}^{N} dq^i \wedge dp_i = 一定. \tag{5-7-10}$$

$\boldsymbol{\omega}$ の不変性から，積分式以外に，(5-6-15)により，２つのベクトル場 v_1, v_2 に対して

$$\boldsymbol{\omega}(v_1, v_2) = 一定 \tag{5-7-11}$$

この式で，v_1, v_2 として，Hamilton ベクトル場 $\boldsymbol{X}_f, \boldsymbol{X}_g$ をとると，P.b. を得るから，

$$\{f, g\} = 一定 \tag{5-7-12}$$

となる．(5-4-1) で定義されるベクトル場 X^f, X^g をとると，Lagrange 括弧の不変性を得る；

$$[f, g] = 一定. \tag{5-7-13}$$

第6章　運動方程式の第1積分

§6-1　運動方程式の積分可能条件

これまでは，運動方程式の一般的性質や，運動方程式の成り立つ空間の構造などを説明してきた．次に問題になるのは，その運動方程式の解を求めることである．そのために，まず運動方程式の積分可能条件を定め，次に，方程式の不変性と第1積分の関係を考察する．それに基づいて第1積分の求め方を述べることにしよう．

すでに述べたように，運動方程式は状態空間 $TQ\times \boldsymbol{R}$ においては $2N$ 個の Pfaff 方程式系

$$\rho^i \equiv dq^i - \xi^i dt = 0, \tag{6-1-1}$$

$$\theta_i \equiv A_{ij} d\xi^j + \frac{\partial p_i(q,\xi,t)}{\partial q^j} dq^j + \left(\frac{\partial p_i}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial q^i}\right) dt = 0 \tag{6-1-2}$$

で表される．Hessian 行列 A_{ij} は正則としているから，(6-1-2) は

$$\theta^i = d\xi^i + (A^{-1})^{ij} \frac{\partial p_j}{\partial q^k} dq^k + (A^{-1})^{ij}\left(\frac{\partial p_j}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial q^j}\right) dt = 0 \tag{6-1-3}$$

と変形される．ここで，θ^i の第2項に (6-1-1) を代入して

$$X^i \equiv -(A^{-1})^{ij} \frac{\partial p_j}{\partial q^k} \xi^k - (A^{-1})^{ij}\left(\frac{\partial p_j}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial q^j}\right) \tag{6-1-4}$$

とおき，

$$\theta^i = d\xi^i - X^i dt = 0 \tag{6-1-5}$$

を (6-1-2) の代わりに用いることにする．すなわち，(6-1-1) と (6-1-5) を状態空間における運動方程式にとることができる．

他方，位相空間 $T^*Q\times \boldsymbol{R}$ における正準運動方程式は Pfaff 方程式系

$$_*\rho^i \equiv dq^i - \frac{\partial H(q,p,t)}{\partial p_i} dt = 0 \tag{6-1-6}$$

$$ {}_*\theta_i \equiv dp_i + \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial q^i} dt = 0 \qquad (6\text{-}1\text{-}7) $$

である．状態空間にしろ，位相空間にしろ運動方程式として $2N$ 個の Pfaff 形式を取り扱うわけであるから，両者に共通に適用できるように，$2N$ 個の独立変数 (q^i, ξ^i) あるいは (q^i, p_i) をまとめて z^m ($m=1\sim 2N$) で表した 1 階偏微分方程式を考察することにする．

すると，取り扱うべき方程式は次の形式にまとめられる；

$$ \frac{dz^1}{X^1(z)} = \frac{dz^2}{X^2(z)} = \cdots = \frac{dz^{2N}}{X^{2N}(z)} = dt. \qquad (6\text{-}1\text{-}8) $$

ここで X^m は，

$$ X^m(z) = \xi^i,\ \ X^i(q, \xi, t)\ ;\ (\text{状態空間}) $$

$$ = \frac{\partial H}{\partial p_i},\ \ -\frac{\partial H(q, p, t)}{\partial q^i}\ ;\ (\text{位相空間}) $$

である．さらに，Pfaff 方程式系

$$ \pi^m \equiv dz^m - X^m dt = 0 \qquad (m=1, \cdots, 2N) \qquad (6\text{-}1\text{-}9) $$

を定義する．時間微分の演算子

$$ \frac{d}{dt} = \dot{z}^m \frac{\partial}{\partial z^m} + \frac{\partial}{\partial t} $$

は，(6-1-9) を用いて

$$ X_t = X^m \frac{\partial}{\partial z^m} + \frac{\partial}{\partial t} \qquad (6\text{-}1\text{-}10) $$

と書き換えられる．この X_t は $T(TQ)\times \boldsymbol{R}$ あるいは $T(T^*Q)\times \boldsymbol{R}$ におけるベクトル場であり，§ 3-1 および § 3-2 で導入した運動の生成系に他ならない．

この X_t と π^m との内積をとると，明らかに

$$ \pi^m(X_t) = 0. \qquad (6\text{-}1\text{-}11) $$

したがって，X_t は π^m と直交するベクトル場であり，以後の考察で中心的役割を演ずる．

いよいよ，Pfaff 方程式系 $\pi^m=0$ の積分を問題にする．まず，この方程式系は完全積分可能であることを示し，そして (6-1-11) を満たす X_t は因子を除いてただ 1 つ存在することを証明しよう．そのために，一般的に成り立つ次の定理を証明する．

定理 6-1

$2N+1$ 個の独立変数 z^m, t からなる $2N$ 個の Pfaff 方程式系がすべて独立であれば，その Pfaff 方程式系は完全積分可能である．

（**証明**）　Pfaff 系 ω^m $(m=1,\cdots,2N)$ はすべて独立とし，

$$\omega^m = a^m_n dz^n + b^m dt \qquad (m, n=1,\cdots,2N) \tag{6-1-12}$$

とおく．一般性を失うことなく $\det(a^m_n) \neq 0$ と仮定してよい．すると，任意の1-形式 $\tilde{\omega}^m$ は関数 $\lambda^m_n(z,t)$, $\sigma^m(z,t)$ を選んで

$$\tilde{\omega}^m = \lambda^m_n \omega^n + \sigma^m dt \tag{6-1-13}$$

と表すことができるから，任意の 2-形式は次に示すような 2-形式

$$(\lambda^m_n \omega^n + \sigma^m dt) \wedge (\theta^l_k \omega^k + \tau^l dt)$$

の和で表される．しかるに，$dt \wedge dt = 0$ であるから，この式は ω^m とある 1-形式 Ω^m_n との外積の和で書ける．すなわち，すべての 2-形式は ω^m と他の 1-形式を用いて表される．$d\omega^m$ は 2-形式であるから，この結果を適用すると

$$d\omega^m = \Omega^m_n \wedge \omega^n$$

と表しうる．上式は Frobenius の定理を満たすから完全積分可能である．

（証明終わり）

定理 6-2

$2N$ 個の Pfaff 形式 (6-1-12) において $2N \times (2N+1)$ 行列 (a^m_n, b^m) の階数が $2N$ で，どの列もすべての要素は 0 でないとする．このすべての ω^m と直交するベクトル場

$$Y \equiv u^m \frac{\partial}{\partial z^m} + v \frac{\partial}{\partial t} \tag{6-1-14}$$

は関数因子の不定性を除いてただ1つ存在する．

（**証明**）　$\omega^m(Y) = a^m_n u^n + b^m v = 0 \qquad (m=1,\cdots,2N)$

仮定により，一般性を失うことなく

$$\det(a^m_n) \neq 0, \quad \exists b^n \neq 0.$$

としてよい．すると，上の連立方程式は u^m/v についてただ1つの解をもつ．よって Y は因子を除き一義的に決まる．　（証明終わり）

(6-1-9) の Pfaff 方程式系 π^m はこの完理の条件を満たすから完全積分可能であって，(6-1-11) を満たす X_t は因子の不定性を除きただ 1 つ存在することが証明できた．すると Pfaff 形式 π^m の生成系はただ 1 つの X_t からなるので，この生成系は明らかに完全系（交換子積が閉じている）をなす．したがって，Frobenius の定理を満たし，完全積分可能である．実は π^m 系の完全積分可能性はこのことからもいえるのである．

非正則な系のうち，ゲージ変換で不変な Lagrange 関数から導かれる運動方程式は拘束条件が現れて，$2N$ 個の π^m は独立でない．そのために，π^m と直交する生成系は X_t の他に独立なベクトル場が存在する（第 8 章 § 8-4 参照）．

第 1 積分とベクトル場 X_t の関係を求めよう．(6-1-8) あるいは (6-1-9) の Pfaff 方程式系の第 1 積分 $f(z, t)$ を

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial z^m}\dot{z}^m+\frac{\partial f}{\partial t}=0 \qquad \mathrm{mod}\,(\pi^m) \tag{6-1-15}$$

によって定義する．上式は運動方程式 $\pi^m=0$ のもとで成り立てばよい． つまり，$f(z, t)$ は運動の保存量であって，

$$f(z, t)=c=\text{一定} \tag{6-1-16}$$

となる．

すでに § 3-1 および § 3-2 で説明したように，X_t は運動の生成演算子で，運動方程式 (6-1-9) と偏微分方程式

$$X_t f=df(X_t)=X^m\frac{\partial f}{\partial z^m}+\frac{\partial f}{\partial t}=0 \tag{6-1-17}$$

とは同等である．(6-1-15) は (6-1-9) のゆえに上式と同値である．$2N$ 個の Pfaff 方程式系 $\pi^m=0$ は完全積分可能であり，$2N$ 個の第 1 積分が存在する．それらを f_m で表そう．すると

$$df_m(X_t)=X_t f_m=X^n\frac{\partial f_m}{\partial z^n}+\frac{\partial f_m}{\partial t}=0, \tag{6-1-18}$$

$$f_m(z, t)=c_m=\text{一定} \qquad (m=1, \cdots, 2N) \tag{6-1-19}$$

となる．$2N+1$ 次元空間において X_t と直交する df_m は $2N$ 個存在するから，当然独立な Pfaff 形式 π^m の数と一致する．

X_t と直交する任意の 1-形式は π^m の 1 次結合で表されるから

$$df_m=\lambda_{mn}\pi^n. \tag{6-1-20}$$

あるいは逆に，df_m が独立であるから

$$\pi^m = \sigma^{mn} df_n \tag{6-1-21}$$

と書ける．ここに λ_{mn}, σ^{mn} は z^m, t の関数である．したがって，π^m 系と df_m 系とは同値である．そのことを

$$\{\pi^m\} \sim \{df_m\} \qquad (m=1, 2, \cdots, 2N) \tag{6-1-22}$$

と表す．すると (6-1-11) と (6-1-18) も同値となる．

(6-1-18) は次のように解釈できる．(6-1-19) は $2N$ 個の超曲面 S_m を与えるが，$2N+1$ 次元空間での f_m の勾配の成分

$$\frac{\partial f_m}{\partial z^1}, \quad \frac{\partial f_m}{\partial z^2}, \quad \cdots, \quad \frac{\partial f_m}{\partial z^{2N}}, \quad \frac{\partial f_m}{\partial t} \tag{6-1-23}$$

は S_m 上の一点 (z^m, t) において S_m に立てた法線ベクトルの成分である．なぜならば，

$$df_m = \frac{\partial f_m}{\partial z^n} dz^n + \frac{\partial f_m}{\partial t} dt = 0$$

であるから，S_m 内に含まれる任意のベクトル dz^m, dt と (6-1-23) は直交しているからである．すると，$2N$ 個の超曲面 S_m に立てた法線は X_t に垂直であることを (6-1-18) は示している．したがって，$2N$ 個の f_m が独立ならば，そのような X_t はただ1つに限られる．独立な $2N$ 個の第1積分の描く S_m の交線は (z^m, t) 空間で1つの曲線を与える．その曲線が，状態空間あるいは位相空間における運動経路である．ベクトル場 X_t はこの曲線への接線ベクトルで，運動の速度を与えるから，速度ベクトル場と解釈される．

ベクトル場 X_t は時間方向の微小変換を与える生成演算子である．つまり，ϵ を微小パラメータとすると

$$\begin{aligned} z^m &\to z'^m = (1+\epsilon X_t) z^m = z^m + \epsilon X^m, \\ t &\to t' \ = (1+\epsilon X_t) t = t + \epsilon \end{aligned} \tag{6-1-24}$$

となる．これらの式は時間 $dt = t' - t$ の間に z^m が運動方程式に従う変化を与えるので，X_t によって生成される1パラメータ変換群は運動経路上の点の移動を引き起こす．X_t における因子の任意性は (6-1-24) において ϵ の任意性に対応する．X_t による変換が運動方程式に一致するようにその因子を選ぶと，X_t は (6-1-10) に限られる．

§ 6-2　運動方程式を不変にする変換

次に Pfaff 方程式系 (6-1-9) を不変にする変換を考える．あるベクトル場

$$Y \equiv u^m(z,t)\frac{\partial}{\partial z^m} + v(z,t)\frac{\partial}{\partial t} \tag{6-2-1}$$

をとる．ϵ をパラメータとする Y による変分を δ で表すと

$$\left.\begin{aligned} \delta z^m &= \epsilon Y z^m = \epsilon u^m \\ \delta t &= \epsilon Y t = \epsilon v \end{aligned}\right\} \tag{6-2-2}$$

となる．微分 dz^m, dt もこの Y によって変換されて

$$\delta(dz^m) = d(\delta z^m), \quad \delta(dt) = d(\delta t)$$

を満たすとする．すると，外微分 d と Y による変分 δ とは可換であるから，δ は Y による Lie 微分 L_Y によって表される．

Pfaff 形式 π^m の変分は

$$\begin{aligned} \delta\pi^m &= \epsilon L_Y \pi^m = \epsilon[d(L_Y z^m) - (L_Y X^m)dt - X^m d(L_Y t)] \\ &= \epsilon(du^m - YX^m dt - X^m dv) \end{aligned} \tag{6-2-3}$$

となる．以後，ベクトル場 X_t, Y などによる微小変換においてはパラメータ ϵ を省略し，$L_{X_t}\pi^m$, $L_Y\pi^m$ などを単に X_t, Y による π^m の変分ということにする．

Y によって生成される変分 $\delta\pi^m = L_Y\pi^m$ も 1-形式である．$\delta\pi^m = 0$ であれば，π^m は変換 Y によって当然不変であるが，それよりもゆるい条件

$$L_Y \pi^m \equiv 0 \mod(\pi^n) \tag{6-2-4}$$

を満たせば，変換後の π'^m 全体ともとの π^m 全体とは同値である．つまり，Pfaff 方程式系 $\pi^m = 0$ は全体として Y によって不変である．このとき微小変換後の変数

$$z'^m = (1+\epsilon Y)z^m, \quad t' = (1+\epsilon Y)t \tag{6-2-5}$$

もまた，もとの Pfaff 方程式系を満足するから，

$$f_m(z,t) = c \tag{6-2-6 a}$$

が第 1 積分ならば

$$f_m(z',t') = c' \tag{6-2-6 b}$$

は変換後の方程式系の第 1 積分である．すると，(6-2-5) とこれら 2 式から

$$\delta f_m = Y f_m(z,t) = c'' \tag{6-2-7}$$

もまた，もとの方程式系の第 1 積分であることが結論される．すなわち

$$X_t f_m = 0 \rightarrow X_t(Y f_m) = 0. \tag{6-2-8}$$

これは，Yが運動方程式を不変にする条件である．

$\{\pi^m\}$系が完全積分可能であれば，$2N$個の第1積分f_mの微分系$\{df_m\}$は$\{\pi^m\}$と同値であるから，$\{df_m\}$もYによって不変である；

$$L_Y df_m = d(L_Y f_m) = d(Yf_m) = 0. \tag{6-2-9}$$

Yがすべてのf_mに対して(6-2-8)を満たす，すなわち，運動方程式を不変に保つための必要十分条件は，X_tとYが次の式を満たすことである*)；

$$[X_t, Y] = X_t Y - Y X_t = 0. \tag{6-2-10}$$

証明は次のとおり．(6-2-10)が満たされれば

$$X_t(Yf_m) = Y(X_t f_m)$$

であるから，(6-2-8)は明らかに成り立つ．逆に，(6-2-8)が成り立てば，

$$[X_t, Y]f_m = 0 \qquad (m = 1, 2, \cdots, 2N) \tag{6-2-11}$$

である．$[X_t, Y]$もまた1つのベクトル場であるが，すでに示したようにすべてのf_mに作用して0となるベクトル場は不定因子を除きX_tに限られる．しかるに$[X_t, Y]$には$\partial/\partial t$がないので0となる．　　　　（証明終わり）

$\{\pi^m = 0\}$系を不変にするベクトル場が2つ以上あるとき，それらベクトル場の間の関係を調べよう．2つのベクトル場Y_1, Y_2がそのようなものとすると

$$Y_3 = [Y_1, Y_2] \tag{6-2-12}$$

もまた$\{\pi^m = 0\}$を不変にするベクトル場である．なぜならば，仮定により

$$X_t(Y_\alpha f) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2),$$

$$[X_t, Y_\alpha] = 0$$

であるから，

$$X_t([Y_1, Y_2]f) = Y_1 X_t(Y_2 f) - Y_2 X_t(Y_1 f) = 0.$$

よってY_3も運動方程式を不変に保つ．

このことから，次々に$\{\pi^m = 0\}$を不変にする新しいベクトル場が得られるように思えるが，多くの場合，$[Y_1, Y_2]$は循環的になったり，0となり新しいものは多くは得られない．いまr個の無限小変換の生成演算子Y_αがLie環をつくるとき，つまり

$$[Y_\alpha, Y_\beta] = c_{\alpha\beta}^{\gamma} Y_\gamma \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \cdots, r) \tag{6-2-13}$$

ここに$c_{\alpha\beta}^{\gamma}$は定数，を満たすとき，Y_αの全体によって生成される変換はLie群をつ

---

*) 一般に，Yが$\partial/\partial t$を含むとき，(6-2-10)の右辺にはX_tに比例する項が現れてもよい．

くる．

ここで Y の不定性に触れておこう．運動方程式系 π^m を不変にするベクトル場Yには，第 1 積分の因子の不定性がある．いま第 1 積分を f, g とすると

$$X_t g=0, \quad X_t(Yf)=0 \tag{6-2-14}$$

であるから，

$$X_t(gY)f=0, \tag{6-2-15}$$

となり gY も (6-2-8) を満たす．また

$$[g_1 Y_1, g_2 Y_2]=g_1(Y_1 g_2)Y_2-g_2(Y_2 g_1)Y_1+g_1 g_2[Y_1, Y_2] \tag{6-2-16}$$

となるが，$Y_1 g_2$，$Y_2 g_1$，$g_1(Y_1 g_2)$ などもまた第 1 積分である．したがって，$[g_1 Y_1, g_2 Y_2]$ も (6-2-8) を満たすので，$\{\pi^m\}$ 系を不変に保つ．よって，Y には第 1 積分の不定因子がある．

ここでベクトル場 Y による変換の幾何学的意味を調べてみよう．Pfaff 方程式系

$$\pi^m=dz^m-X^m dt=0 \qquad (m=1, 2, \cdots, 2N) \tag{6-2-17}$$

は (z^m, t) 空間で，初期条件によって定まる 1 つの運動経路を決定するが，(6-2-17) を不変にする微小変換 Y によって 1 つの経路上の一点は隣接する経路上の一点に移される．なぜならば，$2N$ 個の第 1 積分の組 $\{f_m(z, t)=c_m\}$ に 1 つの経路が対応し，Y によってこれら第 1 積分は別の第 1 積分の組

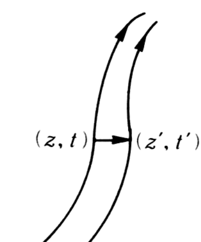


図 6-1

$$f_m(z', t')\equiv f_m(z+\delta z, t+\delta t)=c'_m$$

に移るからである．もし Y として X_t をとれば，1 つの経路に沿った変分であるから，1 本の経路はそれ自身に移る．

さて，第 1 積分を求めるのに，運動方程式の不変形式が重要な役目を果たす．それゆえ，まず不変形式を定義し，その性質を考察しよう．

(z^m, t) 空間の中で，Pfaff 形式 (6-2-17) が与える 2 つの隣接する経路上に同時刻の 2 点をとり，その座標の差を δz^m で表そう．δz^m に関するある形式 $F(z, t, \delta z)$ が Pfaff 方程式系 $\pi^m=0$ の不変形式であるとは，その方程式系によって決定される 2 つの経路に沿って移動しても F の値が不変であるような形式のことである．

Cartan[1] によると，不変形式について，次の有用な定理がある．

定理 6-3

形式 $F(z, t, \delta z)$ が不変形式であるための必要十分条件は，F が第 1 積分 f_m とその変分 δf_m のみで表されることである．

(**証明**)　(6-2-17) の第 1 積分 f_m は $X_t f_m=0$ だから明らかに不変形式である．また，δf_m も初期条件を異にする 2 組の第 1 積分の同時刻での差であるから，やはり不変形式である．したがって，f_m と δf_m のみからなる形式は不変形式である（十分条件）．

次に，必要条件であることを示す．もし F が不変形式であるならば，F は定義によって，$t=0$ における F の値に等しい；

$$\therefore \quad F(z, t, \delta z)=F(z_0, 0, \delta z_0). \tag{6-2-18}$$

$z_0^m, \delta z_0^m$ は $t=0$ における初期値である．ところで，$\pi^m=0$ は完全積分可能であるから，それを解いて z^m が t と初期値 z_0^m で表されたとすると，それらを逆に解いて z_0^m を z^m と t によって表すことができる．

$$z_0^m=z_0^m(z, t). \tag{6-2-19}$$

z_0^m は一定であるから (6-2-19) は第 1 積分である．よって，(6-2-18) の右辺は第 1 積分とその変分のみで表されている．　(証明終わり)

この定理では 2 つの経路上の対応する 2 点は同時刻としたが，同時刻でない δt を含んだ不変形式もこの $F(z, t, \delta z)$ をもとにして求めることができる．時間 t を変えたときの変分を，改めて $(\delta z^m, \delta t)$ と書くことにする．(6-1-20) によって，第 1 積分の微分は π^m の 1 次結合で書ける．同様に，変分 δ に対しても同じことがいえるので，δt の入った変分は π^m の形でのみ入りうる．そこで，(6-2-18) で $\delta t \neq 0$ とすると δt は δz_0^m を通して入るだけであるから，(6-2-18) の左辺で δf_m を $\lambda_{mn} \pi_\delta^n=\lambda_{mn}(\delta z^n - X^n \delta t)$ で置き換えたものが求める不変形式である．よって

$$F(f, \delta f) \equiv \widetilde{F}(z, t, \delta z - X \delta t) \tag{6-2-20}$$

が任意の δt に対する不変形式である．

不変形式 $\tilde{F}$ の中の π_δ^m を δf_m の1次結合で表し，δt を消去すると，結局(6-2-18)の F に戻らねばならないから，すべての不変形式は

$$\Gamma(f, \delta f) \tag{6-2-21}$$

と表しうる．

例 6-1

相互距離に依存するポテンシャル中の2質点系を考える．Lagrange 関数は

$$L=\frac{1}{2}m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2^2-V(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|)=\frac{1}{2}m_1\boldsymbol{\xi}_1^2+\frac{1}{2}m_2\boldsymbol{\xi}_2^2-V(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|).$$

この L から得られる Pfaff 方程式系 $\pi^m=\rho^i, \theta^i$ は

$$\rho_1{}^i=dr_1{}^i-\xi_1{}^i dt=0, \quad \theta_1{}^i=d\xi_1{}^i+\frac{V'}{m_1}r_{12}^i dt=0 \qquad (i=1,2,3)$$

$$\rho_2{}^i=dr_2{}^i-\xi_2{}^i dt=0, \quad \theta_2{}^i=d\xi_2{}^i-\frac{V'}{m_2}r_{12}^i dt=0.$$

ここで，$V'(x)\equiv dV(x)/dx$，$r_{12}^i\equiv(r_1{}^i-r_2{}^i)/|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|$ で $\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2$ 方向の単位ベクトルの成分．したがって

$$X^m=\left(\xi_1{}^i, \xi_2{}^i, -\frac{V'}{m_1}r_{12}^i, \frac{V'}{m_2}r_{12}^i\right)$$

である．

この L は並進と回転に対し不変であるから，当然 π^m も不変である．並進，回転を生成するベクトル場は，それぞれ

$$Y_i^{(1)}=\frac{\partial}{\partial r_1{}^i}+\frac{\partial}{\partial r_2{}^i},$$

$$Y_i^{(2)}=\varepsilon_{ijk}\left(r_1{}^j\frac{\partial}{\partial r_1{}^k}+r_2{}^j\frac{\partial}{\partial r_2{}^k}\right)+\varepsilon_{ijk}\left(\xi_1{}^j\frac{\partial}{\partial \xi_1{}^k}+\xi_2{}^j\frac{\partial}{\partial \xi_2{}^k}\right)$$

である．$\{\pi^m\}$ 系が $Y_i^{(1)}$，$Y_i^{(2)}$ の Lie 微分で不変であることは直接確かめうる．

Noether の定理から，保存量として，全運動量と全角運動量が得られ，それらは

$$P_i=p_{1i}+p_{2i}=m_1\xi_1{}^i+m_2\xi_2{}^i$$
$$L_i=\varepsilon_{ijk}(r_1{}^j p_{1k}+r_2{}^j p_{2k})$$

である．

保存量 P_i, L_i は第 1 積分である．したがって，$Y_i^{(1)}, Y_i^{(2)}$ を作用させたものも保存量となる．実際

$$Y_i^{(1)} P_j = 0, \quad Y_i^{(2)} P_j = \varepsilon_{ijk} P_k,$$

$$Y_i^{(1)} L_j = \varepsilon_{ijk} P_k, \quad Y_i^{(2)} L_j = \varepsilon_{ijk} L_k.$$

この場合は，互いに P_i, L_i の中で閉じていて，これ以上新しい保存則は得られない．

例 6-2

基本 1-形式 $\boldsymbol{\theta}$ の変分 $\delta\boldsymbol{\theta}$ の δ に対しても外微分形式を適用できる．すると

$$\delta\boldsymbol{\theta} = \theta_{\delta i} \wedge \rho_\delta{}^i$$

と書けるから，$\pi_\delta{}^m$ のみで表され，かつ $L_{X_t}\delta\boldsymbol{\theta} = 0$ であることが示せるので不変 2-形式である．

状態空間で θ_i は (6-1-5) の θ^i ではなく，$\theta_i = A_{ij}\theta^j$ であるから，A_{ij}が定数でなければ，(6-2-20) を満たさないように見える．しかし，運動を与える Pfaff 形式を (6-2-17) にとったからで，θ_i, ρ^i を Pfaff 形式 π^m として採用すれば，$\delta\boldsymbol{\theta}$は状態空間でも不変形式となる．

§ 6-3　不変形式および第 1 積分

前節では隣接する 2 つの経路上の 2 点を結ぶ変分を δ で表したが，δ に対しても外微分形式を適用できるので，以後 δ を d と書くことにする．不変形式は第 1 積分と運動方程式としての Pfaff 形式で表されるということが本質的である．不変形式 F を用いて第 1 積分を求めるとき，F の性質が問題であって，表式を δ によって表そうと d を用いようとかまわない．

1 つの不変形式を Γ とすると，運動方程式のもとで不変であるから*)

$$L_{X_t}\Gamma = 0 \tag{6-3-1}$$

でなければならない．また

$$i_{X_t}\Gamma = 0 \tag{6-3-2}$$

を満たすことが示される．

証明．Γ は不変形式だから第 1 積分 f_m と df_m のみで表されるとしてよい．したがって，これらの量がそれぞれ (6-3-1)，(6-3-2) を満足することを示せば十分である．

---

*) L_X, i_X などは本来すべて δ に関する演算であることに注意されたい．

$$L_{X_t} f_m = X_t f_m = 0, \quad L_{X_t} df_m = d(X_t f_m) = 0, \tag{6-3-3 a}$$

$$i_{X_t} f_m = 0, \quad i_{X_t} df_m = df_m(X_t) = X_t f_m = 0. \tag{6-3-3 b}$$

よって証明された．（証明終わり）

また，(6-2-20) の $\tilde{F}(z, t, \pi)$ の場合，(6-1-11) により

$$i_{X_t} \pi^m = \pi^m(X_t) = 0 \tag{6-3-4}$$

であり，任意関数 g との内積 $i_X g$ は定義により 0 であるから，(6-3-2) は満たされる．しかし，$L_{X_t}\pi^m$ は (6-1-9)，(6-1-10) によって 0 とはならず

$$L_{X_t}\pi^m = d(X_t z^m) - X_t X^m dt - X^m d(X_t t) = dX^m - \left(X^n \frac{\partial X^m}{\partial z^n} + \frac{\partial X^m}{\partial t}\right) dt$$

$$= \frac{\partial X^m}{\partial z^n} dz^n - X^n \frac{\partial X^m}{\partial z^n} dt = \frac{\partial X^m}{\partial z^n} \pi^n \tag{6-3-5}$$

となる．したがって，$\tilde{F}$ の形式においては，π^m の係数，つまり $\tilde{F}$ の関数形は (6-3-1) によって制限される．

前節で指摘したように，π^m は df_m の 1 次結合で書けるから，すべての不変形式は $F(f, df)$ としてよい．だから，(6-3-1)，(6-3-2) が，不変形式の満たすべき必要十分条件である．なぜならば，(6-3-3 a, b) を満たすものは第 1 積分に限られるからである．

ところで，運動方程式を不変にするベクトル場 Y によって，(6-2-7) で示したように，第 1 積分 f_m から別の第 1 積分 Yf_m が得られることを用いて，1 つの不変形式から別の不変形式を導くことができる．Γ が不変形式ならば，次の形式も不変形式であり，(6-3-1)，(6-3-2) を満たす．

$$L_Y \Gamma \qquad \text{および} \qquad i_Y \Gamma. \tag{6-3-6}$$

実際に，

$$L_Y f_m = Y f_m, \quad L_Y df_m = d(Y f_m),$$

$$i_Y f_m = 0, \quad i_Y df_m = Y f_m$$

であるから，(6-3-6) は第 1 積分 f_m, Yf_m とそれらの微分のみで書けている．π^m については上式は成り立たないが，df_m で表したものについて上の議論を適用すればよい．

以上の準備のもとで，いよいよ，不変形式 Γ を知って，それらから第 1 積分を求めるいろいろな方法を検討しよう．

(i) 不変 1-形式 $\Gamma^{(1)}$ が閉じていれば，積分できて第 1 積分を得る．すなわち

$$d\Gamma^{(1)}=0 \to \text{局所的に } \Gamma^{(1)}=df \to f=c. \tag{6-3-7}$$

(ii)　不変2-形式 $\Gamma^{(2)}$ と運動方程式 π^m を不変にするベクトル場 Y があって，$i_Y\Gamma^{(2)}$ が閉じていれば，(6-3-6) によって $i_Y\Gamma^{(2)}$ は不変形式であるから

$$i_Y\Gamma^{(2)}=df \tag{6-3-8}$$

より第1積分 f が得られる.

(iii)　Y_1, Y_2 は π^m を不変にする2つの独立なベクトル場であるとし，$\Gamma^{(2)}$ を不変2-形式とすると

$$\Gamma^{(2)}(Y_1, Y_2)=i_{Y_2}i_{Y_1}\Gamma^{(2)} \tag{6-3-9}$$

は (6-3-6) によって不変0-形式であるから，第1積分である.

(iv)　上の (ii), (iii) を一般化して次のことがいえる.

$\Gamma^{(r)}$ を不変 r-形式とし，Y_α $(\alpha=1,2,\cdots,r)$ を π^m を不変にする独立なベクトル場とすると，1-形式

$$\Gamma^{(r)}(Y_{\alpha_1}, Y_{\alpha_2}, \cdots, Y_{\alpha_{r-1}}) \tag{6-3-10}$$

は不変1-形式であり，$g^m df_m$ と書ける．ここに g^m, f_m は第1積分である．$Y_{\alpha_1}, \cdots, Y_{\alpha_{r-1}}$ は $Y_1, \cdots, Y_r$ の中から $r-1$ 個任意にとった組である.

(6-3-10) が閉じていれば局所的な第1積分が求まる．また

$$\Gamma^{(r)}(Y_1, Y_2, \cdots, Y_r) \tag{6-3-11}$$

は第1積分である.

これまでは不変形式から第1積分を求める方法を述べたが，不変形式でなくとも，特別な微分形式と X_t, Y から第1積分を得ることができる.

(v)　ある2-形式を $\theta^{(2)}$ とし，$i_{X_t}\theta^{(2)}$ が閉じていれば

$$i_{X_t}\theta^{(2)}=df \tag{6-3-12}$$

なる f が局所的に存在し，f は第1積分でる*)．また

$$i_Y i_{X_t}\theta^{(2)}=\theta^{(2)}(X_t, Y)=Yf \tag{6-3-13}$$

も第1積分である.

証明．仮定 (6-3-12) より

$$i_{X_t}i_{X_t}\theta^{(2)}=i_{X_t}df=X_t f.$$

しかるに，左辺は $\theta^{(2)}(X_t, X_t)\equiv 0$．よって，$f$ は第1積分である．したがって Yf も第1積分である.　（証明終わり）

(vi)　最後に，Jacobi の最終乗式の方法を説明する．Pfaff 方程式系

---

*)　$\theta^{(2)}$ が不変形式ならば (6-3-12) は消える.

$$\pi^m = dz^m - X^m dt \qquad (m=1,\cdots,2N) \tag{6-3-14}$$

は完全積分可能であり，その第 1 積分の微分 df_m は π^m の 1 次結合で表される．また，不変形式は f_m と df_m あるいは π^m のみで表されるということから，不変形式の最大次数は $2N$ である．したがって，最大次数の不変形式 $\Gamma^{(2N)}$ は次のように書ける；

$$\Gamma^{(2N)} = M(z)\pi^1 \wedge \pi^2 \wedge \cdots \wedge \pi^{2N} \tag{6-3-15}$$

ここに $M(z)$ は z のある関数である．

$\Gamma^{(2N)}$ が π^m に対する不変形式であるために $M(z)$ の満たすべき条件を求めよう．(6-3-1) により

$$L_{X_t}\Gamma^{(2N)} = 0 \tag{6-3-16}$$

この式に (6-3-15) を代入し，(6-3-5) を使うと

$$X_t M + M\frac{\partial X^m}{\partial z^m} = \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z^m}(MX^m) = 0 \tag{6-3-17}$$

を得る．(6-3-17) の解 $M(z)$ を Jacobi 乗式という．

ちなみに，不変形式の外微分はまた不変形式であることは明らかであるから，最大次数の不変形式 $\Gamma^{(2N)}$ に対して

$$d\Gamma^{(2N)} = 0. \tag{6-3-18}$$

である．(6-3-17) は実はこれからも導かれるのである．

偏微分方程式 (6-3-17) の解がいくつか知られているならば，それから第 1 積分が求まる．M_1, M_2 を Jacobi 乗式とすると，(6-3-17) から

$$X_t \ln M_\alpha + \frac{\partial X^m}{\partial z^m} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2),$$

$$\therefore \quad X_t \ln\left(\frac{M_1}{M_2}\right) = 0.$$

よって

$$\frac{M_1}{M_2} = c = \text{一定} \tag{6-3-19}$$

は第 1 積分である．

最大不変形式 $\Gamma^{(2N)}$ は次のようにも表される；

$$\Gamma^{(2N)} = \bar{N}(f)df_1 \wedge \cdots \wedge df_{2N}. \tag{6-3-20}$$

これと (6-3-15) を比較し，$dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^{2N}$ の係数を取り出すと

$$M(z)=\frac{\partial(f)}{\partial(z)}\bar{N}(f) \qquad \left(\frac{\partial(f)}{\partial(z)}\text{は Jacobian}\right). \tag{6-3-21}$$

すると

$$\frac{M_1}{M_2}=\frac{\bar{N}_1}{\bar{N}_2} \tag{6-3-22}$$

は明らかに第1積分である．

特に，$\partial X^m/\partial z^m=0$ のとき，M それ自身が第1積分であることは(6-3-17)からわかる．速度に依存しない通常の力の場合にこの条件が満たされる．

いくつかの第1積分がすでにわかっているとき，最終乗式の理論を適用して新たな第1積分を求めることができる．いま r 次の不変微分形式 $\Gamma^{(r)}$ $(r<2N)$ を知っており，さらに $2N-r$ 個以上の第1積分 f_α $(\alpha=1,2,\cdots,k)$ が求まっているとする．これら第1積分の中から $2N-r$ 個を選んで $2N$ 次の不変形式

$$\Gamma^{(2N)}=\Gamma^{(r)}\wedge df_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge df_{\alpha_{2N-r}} \tag{6-3-23}$$

をつくったとき，$\Gamma^{(2N)}\neq 0$ ならば，$\Gamma^{(r)}, df_\alpha$ をすべて π^m で表し，(6-3-15)と比較すれば，$M(z)$ の具体的な表式が求まる．こうして得られたJacobi 乗式の比をつくれば第1積分が得られる．

その特別な場合は，$2N-1$ 個の第1積分が既知のときである．このとき，最後の $2N$ 番目の第1積分は1回の求積で求まる．

証明．(6-3-15)における $2N-1$ 個の π^m を第1積分 df_m $(m=1,2,\cdots,2N-1)$ で置き換え

$$\Gamma^{(2N)}=\bar{N}df_1\wedge\cdots\wedge df_{2N-1}\wedge\pi^{2N} \tag{6-3-24}$$

を得たとする．$\bar{N}$ は既知となる．この形式は Pfaff 形式系として(6-3-15)と同値な

$$\left.\begin{aligned} df_m&=0\\ \pi^{2N}&=0\end{aligned}\right\} \qquad (m=1,2,\cdots,2N-1) \tag{6-3-25}$$

に対する最終乗式であるから不変形式である．すると，$\bar{N}\pi^{2N}$ は不変形式となり，しかも残された唯一の積分すべき方程式 $\pi^{2N}=0$ の不変形式である．つまり，(6-3-18)ゆえに $\bar{N}\pi^{2N}$ は完全微分だから積分できて $2N$ 番目の第1積分が求まる．

次に，$\{\pi^m\}$ がベクトル場 Y によって不変ならば，不変形式 $\Gamma^{(2N)}$ の Y による Lie 微分をとることにより，新たな Jacobi 乗式を得る．実際に

$$L_Y\Gamma^{(2N)}=YM\pi^1\wedge\cdots\wedge\pi^{2N}+M\sum_{m=1}^{2N}\pi^1\wedge\cdots\wedge L_Y\pi^m\wedge\pi^{m+1}\wedge\cdots\wedge\pi^{2N}. \tag{6-3-26}$$

他方，$\{\pi^m\}$ は Y により不変だから，(6-2-4) によって

$$L_Y\pi^m = u_n^m\pi^n \tag{6-3-27}$$

と表される．この式を (6-3-26) に代入すると，n が m 以外のところはすべて 0 となるから

$$L_Y\Gamma^{(2N)} = (YM + u_m^m M)\pi^1\wedge\pi^2\wedge\cdots\wedge\pi^{2N} \tag{6-3-28}$$

ところが (6-3-6) で示したように，$L_Y\Gamma^{(2N)}$ も不変形式である．よって，M が Jacobi 乗式ならば

$$M' = (Y + u_m^m)M \tag{6-3-29}$$

も Jacobi 乗式である．すると (6-3-19) により

$$u_m^m + M^{-1}(YM) \tag{6-3-30}$$

は第 1 積分である．（証明終わり）

以上の一般的な考察に基づき，状態空間，あるいは位相空間における第 1 積分の具体例を見ていくことにしよう．

例 6-3

不変形式でない 2-形式 $\boldsymbol{\theta}^{(2)}$ から第 1 積分を得る (v) の簡単な例はシンプレクティク構造

$$\omega = dq^i\wedge dp_i$$

である．

$$i_{X_t}\omega = -\left(\frac{\partial p_i}{\partial q^j}\xi^j + \frac{\partial p_i}{\partial \xi^j}X^j + \frac{\partial p_i}{\partial t}\right)dq^i + \xi^i dp_i = dE + \frac{\partial L}{\partial t}dt.$$

L が t を陽に含まなければ

$$i_{X_t}\omega = dE.$$

よって，E = 一定．

§ 6-4 応　用　例

Pfaff 方程式系 π^m と不変形式 Γ を用いた第 1 積分の求め方は，状態空間と位相空間でまったく並行してなされているので，特に区別する必要はないのであるが，なるべく具体的にするために，状態空間での Lagrange 方程式を主としてとりあげる．

Pfaff 形式 π^m を改めて書くと，状態空間では

$$\left.\begin{aligned}\rho^i &= dq^i - \xi^i dt\\ \theta^i &= d\xi^i - X^i dt\end{aligned}\qquad (i=1,\cdots,N),\right\} \tag{6-4-1}$$

$$X^i \equiv (A^{-1})^{ij}\left(\frac{\partial L}{\partial q^j} - \frac{\partial^2 L}{\partial \xi^j \partial q^k}\xi^k - \frac{\partial^2 L}{\partial \xi^j \partial t}\right). \tag{6-4-2}$$

Pfaff 形式 ρ^i, θ^i の生成系，すなわち運動を生成するベクトル場は

$$X_t = \xi^i \frac{\partial}{\partial q^i} + X^i \frac{\partial}{\partial \xi^i} + \frac{\partial}{\partial t} \tag{6-4-3}$$

である．

これに対応して，位相空間では

$$\left.\begin{aligned}{}_*\rho^i &= dq^i - \frac{\partial H}{\partial p_i}dt,\\ {}_*\theta_i &= dp_i + \frac{\partial H}{\partial q^i}dt,\end{aligned}\right\} \tag{6-4-4}$$

$${}_*X_t = \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{\partial}{\partial t}. \tag{6-4-5}$$

これら Pfaff 方程式系は §6-1 で示したように完全積分可能であり，$2N$ 個の第1積分が存在する．

不変形式として最も重要なものは，基本1-形式 $\Omega = p_i dq^i - E dt$ の微分

$$\Gamma^{(2)} = d\Omega = \left(dp_i - \frac{\partial L}{\partial q^i}dt\right)\wedge(dq^i - \xi^i dt) \tag{6-4-6}$$

ここに

$$p_i = \partial L/\partial \xi^i$$

である．実際に，$d\Omega$ は不変形式であるための必要十分条件 (6-3-1)，(6-3-2) を満たす；

$$L_{X_t} d\Omega = 0, \quad i_{X_t} d\Omega = 0. \tag{6-4-7}$$

証明*)．$d\Omega$ を ρ^i と θ^i を用いて表すと

$$d\Omega = \frac{\partial p_j}{\partial q^i}\rho^i \wedge \rho^j + A_{ij}\theta^i \wedge \rho^j \tag{6-4-8}$$

---

*）この証明は位相空間では $d_*\Omega = {}_*\rho^i \wedge {}_*\theta_i$ となるから簡単である．例6-2 でも言及したように，状態空間でも Pfaff 形式として θ_i を採用し，それに対応する X_t を使えば，位相空間のときと同様，証明ははるかに簡単である．$\{\rho^i, \theta_i\}$ と $\{\rho^i, \theta^i\}$ とは同値である．

となる．また (6-3-5) を具体的に書くと

$$L_{X_t}\rho^i=\theta^i,\qquad L_{X_t}\theta^i=\frac{\partial X^i}{\partial q^j}\rho^j+\frac{\partial X^i}{\partial \xi^j}\theta^j. \tag{6-4-9}$$

よって

$$L_{X_t}d\Omega=-\left(X_t\frac{\partial p_i}{\partial q^j}+A_{ik}\frac{\partial X^k}{\partial q^j}\right)\rho^i\wedge\rho^j$$

$$+\left(\frac{\partial p_i}{\partial q^j}-\frac{\partial p_j}{\partial q^i}-X_tA_{ij}-A_{jk}\frac{\partial X^k}{\partial \xi^i}\right)\theta^i\wedge\rho^j \tag{6-4-10}$$

を得る．しかるに，X^i と p_i の定義を用いると

$$X_t\frac{\partial p_i}{\partial q^j}+A_{ik}\frac{\partial X^k}{\partial q^j}=\frac{\partial^2 L}{\partial q^i\partial q^j}, \tag{6-4-11}$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial q^j}-\frac{\partial p_j}{\partial q^i}-X_tA_{ij}-A_{jk}\frac{\partial X^k}{\partial \xi^i}=0 \tag{6-4-12}$$

となる．(6-4-11) は i,j につき対称であるから，(6-4-10) の右辺は 0 となり，(6-4-7) の第 1 式は証明された．第 2 式は

$$\rho^i(X_t)=\theta^i(X_t)=0$$

から明らかである． （証明終わり）

この不変形式 $\Gamma^{(2)}=d\Omega$ から第 1 積分を求めよう．まず簡単なものは

(1) エネルギー積分

L あるいは H が時間 t を陽に含まなければ，X^i も t に陽によらぬ．よって，t を一定値だけずらせる変換

$$t\to t+\varepsilon,\qquad Y_t=\frac{\partial}{\partial t} \tag{6-4-13}$$

によって Pfaff 系 ρ^i,θ^i は不変である．そして

$$i_{Y_t}d\Omega=dp_i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)d\xi^i-d\xi^i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)dp_i-dE\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)dt+dt\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)dE$$

であるが，p_i,ξ^i，$E=p_i\xi^i-L$ はすべて t によらぬから，$dp_i(\partial/\partial t)$ などは 0．

$$\therefore\quad i_{Y_t}d\Omega=dE. \tag{6-4-14}$$

よって § 6-3 の (ii) によって $E(q,\xi)=$一定．

(2) 循環座標に共役な運動量積分

q^r が循環座標ならば，定義から X^i も q^r によらない．よって変換

$$q^r \to q^r + \epsilon, \quad \xi^r \to \xi^r\ ;\ Y_r = \frac{\partial}{\partial q^r} \tag{6-4-15}$$

により ρ^i, θ^i は不変．当然，L, p_i, E も q^r によらないから

$$i_{Y_r} d\Omega = -dq^i\left(\frac{\partial}{\partial q^r}\right) dp_i = dp_r$$

$$\therefore \quad p_r = 一定. \tag{6-4-16}$$

循環座標の実例は，球対称ポテンシャルの系を極座標 (r, θ, φ) で表したときの φ である．この他によく知られている例は，対称なこまの運動である．一様重力場の中でのこまに関する L は，Euler 角を用いると

$$L = \frac{1}{2}A(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta) + \frac{1}{2}B(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2 + Mgh\cos\theta \tag{6-4-17}$$

で与えられる．A, B は慣性能率，h は支点から重心までの距離である．φ, ψ は循環座標であるから

$$\left.\begin{aligned} p_\varphi &= A\dot{\varphi}\sin^2\theta + B\cos\theta\,(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta) = 一定 \\ p_\psi &= B(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta) = 一定 \end{aligned}\right\} \tag{6-4-18}$$

が第1積分である．

運動量，角運動量積分は例6-1ですでに述べたが，これらは循環座標に対応する保存則からも得られる．質点系を相対座標と重心座標で表すと，重心座標が循環座標となる．重心座標に共役な運動量が全運動量である．球対称ポテンシャルの循環座標 φ に対応する p_φ は，第3軸まわりの角運動量であることはよく知られている．

(3) 角運動量積分

直交直線座標で系が回転対称ならば，変換

$$r_a^i \to r_a^i + \epsilon_{ijk}\epsilon^j r_a^k, \quad \xi_a^i \to \xi_a^i + \epsilon_{ijk}\epsilon^j \xi_a^k \qquad (i = 1, 2, 3),$$

$$Y_i = \sum_a \epsilon_{ijk}\left(r_a^j \frac{\partial}{\partial r_a^k} + \xi_a^j \frac{\partial}{\partial \xi_a^k}\right) \qquad (a：質点の番号) \tag{6-4-19}$$

で系は不変である．すると

$$i_{Y_i} d\Omega = -\sum_a \epsilon_{ijk} d(x_a^j p_{ak}) \equiv -dL_i \quad あるいは \quad d\Omega(Y_i, Y_j) = \epsilon_{ijk} L_k. \tag{6-4-20}$$

よって，§ 6-3 の (ii) あるいは (iii) によって，角運動量 L_i は第 1 積分である．

（4） 最終乗積の例

Jacobi の乗式 M の満たすべき式は (6-3-17) から

$$X_t \ln M + \frac{\partial X^i}{\partial \xi^i} = 0 \tag{6-4-21}$$

となる．したがって，もし力 X^i が

$$\frac{\partial X^i}{\partial \xi^i} = 0 \tag{6-4-22}$$

を満たせば，M 自身が第 1 積分である．X^i が速度依存でない力，あるいは電磁気における Lorent 力のように X^i が ξ^j $(i \neq j)$ にのみ依存する場合に (6-4-22) は満たされる．このような場合は運動方程式 $X_t f = 0$ を解くのと変わらない．

Jacobi の乗式 M の例は，正則な Lagrange 関数の場合，$\det(A_{ij})$ である．$d\Omega$ は不変 2-形式であるから $(d\Omega)^N$ も不変形式である．状態空間では $d\Omega$ は (6-4-8) で表されるから，最終乗式を (6-3-15) の表式で表すと θ^i, ρ^i がそれぞれ N 個ずつ現れるので，(6-4-8) の第 2 項のみが寄与する．したがって，定数係数を除いて

$$\Gamma^{(2N)} = (d\Omega)^N = (A_{ij}\theta^i \wedge \rho^j)^N \propto \det(A_{ij})\theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \cdots \wedge \theta^N \wedge \rho^1 \wedge \cdots \wedge \rho^N \tag{6-4-23}$$

よって

$$M = \det(A_{ij}) \tag{6-4-24}$$

を得る．少なくとも Hessian 行列が正則で，定数でなければ，M の 1 つとして $\det(A_{ij})$ が存在する．そのときは，X^i は速度依存となり，(6-4-22) は満たされない．

次の速度依存ポテンシャルをもつ Lagrange 関数を例にとって少し詳しく説明しよう．

$$L = \frac{1}{2} g_{ij}(q)\xi^i \xi^j - V(q) \tag{6-4-25}$$

ここで

$$g \equiv \det(g_{ij}) \neq 0 \tag{6-4-26}$$

とする．$g = 0$ の場合は Noether の第 2 定理のところの例 2-6 の L である．

$$X^i = -\Gamma^i{}_{jk}\xi^j\xi^k - g^{ij}\frac{\partial V}{\partial q^j} \tag{6-4-27}$$

となる．ここに

$$\Gamma^i{}_{jk} \equiv \frac{1}{2}g^{il}\left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^l}\right), \tag{6-4-28}$$

$$g^{ij}g_{jk} = \delta^i{}_k\,.$$

(6-4-28) で i, j を縮約すると

$$\Gamma^i{}_{ij} = \frac{1}{2}g^{ik}\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} = \frac{\partial}{\partial q^j}\ln\sqrt{g} \tag{6-4-29}$$

を得る．また

$$\frac{\partial X^i}{\partial \xi^i} = -2\Gamma^i{}_{ij}\xi^j = -\xi^i\frac{\partial}{\partial q^i}\ln g \tag{6-4-30}$$

であるから，(6-4-21) は次のようになる．

$$X_t\left(\ln\frac{M}{g}\right) = \left(\xi^i\frac{\partial}{\partial q^i} + X^i\frac{\partial}{\partial \xi^i}\right)\ln\frac{M}{g} = 0\,. \tag{6-4-31}$$

これから

$$M = g \tag{6-4-32}$$

は1つの解である．これはすでに (6-4-24) で得たものに他ならない．(6-4-31) の解 M/g は第1積分である．

ここで，さらに

$$f \equiv \frac{M}{g} = p_i\varphi^i(q) = g_{ij}\xi^i\varphi^j \tag{6-4-33}$$

とおき，(6-4-31) に代入して整理すると

$$\xi^i\xi^j\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\varphi^k + g_{ik}\frac{\partial \varphi^k}{\partial q^j} + g_{jk}\frac{\partial \varphi^k}{\partial q^i}\right) - \varphi^i\frac{\partial V}{\partial q^i} = 0$$

を得るから，φ^k が Killing 方程式

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\varphi^k + g_{ik}\frac{\partial \varphi^k}{\partial q^j} + g_{jk}\frac{\partial \varphi^k}{\partial q^i} = 0 \tag{6-4-34}$$

と，

$$\varphi^i\frac{\partial V}{\partial q^i} = 0 \tag{6-4-35}$$

の解であれば，(6-4-33) は第1積分である．この結果は Noether の定理から得られるものと同じである．

§2-5 の例2-6 と同様に変換

$$\left.\begin{aligned} &q^i \to q^i + \varepsilon\varphi^i, \quad \xi^i \to \xi^i + \varepsilon\dot{\varphi}^i, \\ &Y = \varphi^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \dot{\varphi}^i \frac{\partial}{\partial \xi^i}, \end{aligned}\right. \qquad (6\text{-}4\text{-}36)$$

によって (6-4-25) の L は不変である．ただし，この例では $A_{ij}=g_{ij}$ は正則であるから ε は定数である．実際，Pfaff 形式も (6-4-34)，(6-4-35) のために

$$\left.\begin{aligned} L_Y\rho^i &= \frac{\partial\varphi^i}{\partial q^j}\rho^j, \\ L_Y\theta^i &= \frac{\partial^2\varphi^i}{\partial q^j\partial q^k}\xi^j\rho^k + \frac{\partial\varphi^i}{\partial q^j}\theta^j, \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}4\text{-}37)$$

となる．したがって (6-3-30) によって

$$2\frac{\partial\varphi^i}{\partial q^i} + \frac{1}{M}YM \qquad (6\text{-}4\text{-}38)$$

は第1積分である．M として，先に得た g を代入すると，この式は

$$2\left(\frac{\partial\varphi^i}{\partial q^i} + \Gamma^j{}_{ij}\varphi^i\right)$$

となるが，Killing 方程式のため，これは0である．よって，g 以外の M の解を見つけねばならない．

もし，g_{ij} と V が特定の q^r によらなければ，Killing 方程式 (6-4-34)，(6-4-35) は

$$\varphi^i = \delta^i{}_r$$

という解をもつ．すると，(6-4-33) から p_r＝一定 は第1積分である．q^r が循環座標であるから，この結果は (6-4-16) と当然一致している．

例 6-4

あまり実用的ではないが，これまでの総括的な実例をあげておこう．等方2次元調和振動子の L は ($m=k=1$ の単位で)

$$L = \frac{1}{2}({\xi_1}^2 + {\xi_2}^2) - \frac{1}{2}({q_1}^2 + {q_2}^2).$$

これより

$$X_t=\xi_i\frac{\partial}{\partial q_i}-q_i\frac{\partial}{\partial \xi_i}+\frac{\partial}{\partial t}\qquad (i=1,2)$$

を得る．π^m を不変にするベクトル場として

$$Y_1=q_i\frac{\partial}{\partial q_i}+\xi_i\frac{\partial}{\partial \xi_i},$$

$$Y_2=\epsilon_{ij}\left(q_i\frac{\partial}{\partial q_j}+\xi_i\frac{\partial}{\partial \xi_i}\right),$$

$$Y_3=q_1\frac{\partial}{\partial q_1}-q_2\frac{\partial}{\partial q_2}+\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_1}-\xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_2}$$

がある．Y_1 は q_1, q_2 方向の拡大を与える変換 $q_i\to e^{\epsilon}q_i$, Y_2 は原点を中心とする回転，Y_3 は q_1 方向の拡大，q_2 方向の縮小を与える変換 $q_1\to e^{\epsilon}q_1$，$q_2\to e^{-\epsilon}q_2$ の生成演算子である．これらの Y_a の交換子積から

$$Y_4=\frac{1}{2}[Y_2, Y_3]=q_1\frac{\partial}{\partial q_2}+q_2\frac{\partial}{\partial q_1}+\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_2}+\xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_1}$$

を得る．これ以外はすべて0となり新たなベクトル場は出ない．これら Y_a はすべて $[Y_a, X_t]=0$ を満たす．

まず，例6-3によって

$$i_{X_t}\omega=dE$$

から，エネルギー積分 E を得る．不変2-形式 $d\Omega$ から角運動量積分

$$d\Omega(Y_1, Y_2)=\epsilon_{ij}q_i\xi_j=l$$

を得る．Y_a を E に作用させて得られる新たな第1積分は

$$Y_3E=\xi_1^2+q_1^2-(\xi_2^2+q_2^2)\equiv 2(E_1-E_2),$$

$$Y_4E=2(\xi_1\xi_2+q_1q_2).$$

$Y_a l$ からは新たなものは出ない．

ここで，注目すべきことは，これら Y_a は必ずしも作用積分を不変にしないことである．実際，Y_a を L に作用させると

$$Y_1L=2L,\quad Y_2L=0$$

$$Y_3L=2(L_1-L_2)\equiv\xi_1^2-q_1^2-(\xi_2^2-q_2^2)$$

$$Y_4L=2(\xi_1\xi_2-q_1q_2)\equiv L'$$

となる[2]．

Y_2 は L を不変にするから Noether の定理と対応するが，Y_1, Y_3, Y_4 は L あるい

は作用積分を不変にしないにもかかわらず，運動方程式は不変にする．その理由は次のとおりである．Y_1 変換によって $L \to (1+2\epsilon)L$ となることを上の第 1 式は示す．L とその定数倍とは同一の運動方程式を与える．Y_3 による変換は $L=L_1+L_2 \to (1+2\epsilon)L_1+(1-2\epsilon)L_2$ をもたらすが，q_1 と q_2 とはまったく独立分離しているから，変換後の L も同じ運動方程式を与える．

Y_4 による変換は少し事情が異なる．上の第 4 式の L' はもとの L とまったく違うが，実は § 3-4 の例 3-6 で示したように，L' は L と同値な運動方程式を導くものである．Y_3E と Y_4E とはそれぞれ Y_3L と Y_4L を Lagrange 関数とするエネルギー積分である．

このように運動方程式を不変にする変換にはそれに対応する保存則（第 1 積分）が存在するが，このことは Noether の定理と必ずしも 1 対 1 の対応をしない．Lagrange 方程式を不変にする変換を生成するベクトル場 Y によって L の変換は次の 3 つの形に分類される；

$$YL=\frac{dF}{dt},$$
$$=cL,$$
$$=cL'.$$

ここに L' は L と同値な運動方程式を与える異形の Lagrange 関数である．

§ 6-5　位相空間における第 1 積分

本章におけるこれまでの理論は正準方程式にも適用できるから，改めて位相空間での議論を繰り返す必要はない．しかし，位相空間はシンプレクティク構造という特殊性をもっているから，Poisson 括弧(P. b.)を用いた独特な理論が可能である．その点を強調するために本節で位相空間における第 1 積分をとりあげる．

正準方程式は Hamilton 関数 H を母関数とし，時間 t をパラメータとする微小正準変換であるから，H の Hamilton ベクトル場 $\boldsymbol{X}_H$ からも第 1 積分が導かれる．力学量 $f(q,p,t)$ が

$$\frac{df}{dt}=X_tf=\boldsymbol{X}_Hf+\frac{\partial f}{\partial t}=\{f,H\}+\frac{\partial f}{\partial t}=0 \qquad \text{(6-5-1 a)}$$

あるいは，同じことであるが

$$\dot{f} \equiv \frac{df}{dt} = df(X_t) = 0 \qquad \text{(6-5-1 b)}$$

を満たせば，f は第1積分である．特に，f が t を陽に含まなければ，

$$\dot{f} = df(\boldsymbol{X}_H) = \{f, H\} = 0 \qquad \text{(6-5-2)}$$

となり，このとき，f の Hamilton ベクトル場 $\boldsymbol{X}_f$ と $\boldsymbol{X}_H$ とは可換である．なぜならば (5-3-22) により

$$[\boldsymbol{X}_H, \boldsymbol{X}_f] = \boldsymbol{X}_{\{f,H\}} = 0 \qquad \text{(6-5-3)}$$

(6-5-2) において，f として H 自身，あるいは H に含まれない循環座標に対応する正準運動量 p_r をとれば，(6-5-2) は消えるから，H や p_r は第1積分であることは明らかである．

f_1, f_2 が第1積分ならば，$\{f_1, f_2\}$ も第1積分であることは Jacobi の恒等式から容易にわかる．f_1, f_2 は (6-5-1) を満たすから

$$\boldsymbol{X}_H\{f_1, f_2\} = \{H, \{f_1, f_2\}\} = -\{f_1, \{f_2, H\}\} - \{f_2, \{H, f_1\}\} = 0\,. \qquad \text{(6-5-4)}$$

これを微分形式を用いて表現してみよう．一般に任意の1-形式 $\boldsymbol{\omega}$ と2つのベクトル場 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2$ に対して恒等式 (1-3-18)

$$d\boldsymbol{\omega}(X_1, X_2) = X_1\boldsymbol{\omega}(X_2) - X_2\boldsymbol{\omega}(X_1) - \boldsymbol{\omega}([X_1, X_2]) \qquad \text{(6-5-5)}$$

が成り立つ．

(6-5-4) に対応する式は，(6-5-5) において $\boldsymbol{\omega}$ として dH をとり，X_1, X_2 として Hamilton ベクトル場 $\boldsymbol{X}_{f_1}, \boldsymbol{X}_{f_2}$ をとると，次のようになる．

$$d^2H(\boldsymbol{X}_{f_1}, \boldsymbol{X}_{f_2}) = \boldsymbol{X}_{f_1}dH(\boldsymbol{X}_{f_2}) - \boldsymbol{X}_{f_2}dH(\boldsymbol{X}_{f_1}) - dH([\boldsymbol{X}_{f_1}, \boldsymbol{X}_{f_2}]).$$

しかるに，$d^2=0$，そして

$$dH(\boldsymbol{X}_f) = -df(\boldsymbol{X}_H) = \{H, f\}$$

であるから，上式から

$$0 = dH([\boldsymbol{X}_{f_1}, \boldsymbol{X}_{f_2}]) = dH(\boldsymbol{X}_{\{f_2, f_1\}}) = \{H, \{f_2, f_1\}\}$$

を得る．よって (6-5-4) が導かれた．

$$f_1, f_2 : \text{第1積分} \rightarrow \{f_1, f_2\} : \text{第1積分}. \qquad \text{(6-5-6)}$$

この事実は，§6-3 で示したように，運動方程式を不変にする変換のベクトル場 Y と第1積分 f とから，別の第1積分 Yf を得ることに対応している．なぜならば，$\boldsymbol{X}_f$ は H を不変にする変換の生成演算子であり，したがって運動方程式も不変にするからである．

例 6-5

Jacobi の恒等式は公式(6-5-5)を用いて簡単に導ける．f_α ($\alpha=1,2,3$)の Hamilton ベクトル場を $\boldsymbol{X}_\alpha$ とする．ω として df_3 をとると

$$
\begin{aligned}
0=d^2f_3(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2)&=\boldsymbol{X}_1df_3(\boldsymbol{X}_2)-\boldsymbol{X}_2df_3(\boldsymbol{X}_1)-df_3([\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2])\\
&=\boldsymbol{X}_1\{f_3,f_2\}-\boldsymbol{X}_2\{f_3,f_1\}-df_3(\boldsymbol{X}_{\{f_2,f_1\}})\\
&=\{f_1,\{f_2,f_3\}\}+\{f_2,\{f_3,f_1\}\}+\{f_3,\{f_1,f_2\}\}.
\end{aligned}
$$

例 6-6

球対称な力学系では角運動量の成分 $\boldsymbol{L}_\alpha$ ($\alpha=1,2,3$) は第 1 積分であり,

$$\{L_\alpha,L_\beta\}=\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}L_\gamma.$$

よって，第 1 積分 L_1,L_2 から L_3 が第 1 積分として求まる．

§ 6-6 関　数　群

(6-5-6) は，第 1 積分の集合は P. b. に関して閉じていることを示す．もし，$\{f_1, f_2\}$ が f_1,f_2 とは独立な関数 f_3 であれば，f_3 と f_1,f_2 との P. b. をつくり，独立関数が得られなくなるまで，この操作を繰り返して独立な第 1 積分の組

$$f_1,f_2,\cdots,f_r\equiv\{f_\alpha\}\qquad(\alpha=1,2,\cdots,r)$$

が得られたとする．独立な第 1 積分は $2N$ 個しかないから，$r\leq 2N$．$2N$ 個の変数 q^i, p_i からなる独立な関数は高々 $2N$ だから，$r\leq 2N$ は当然である．いま，F_1，F_2 を f_α のみの関数とすると

$$\{F_1,F_2\}=\frac{\partial F_1}{\partial f_\alpha}\frac{\partial F_2}{\partial f_\beta}\{f_\alpha,f_\beta\}\tag{6-6-1}$$

であるので，$\{F_1,F_2\}$ もまた f_α のみの関数になる．このように，f_α の任意関数*) F_β は P. b. に関して閉じている．このような F_α の集合を関数群 (function group) という．そして，$\{f_\alpha\}$ をその関数群の基底といい，r を群の階数 (rank) という．r は $\{f_\alpha\}$ の Jacobian の階数である．

Eisenhart [3] に従って関数群の基本的な性質をこの節で述べることにする．

正準方程式の $2N$ 個の独立な第 1 積分 $\{f_m\}$ ($m=1,\cdots,2N$) は関数群の基底をなす．$2N$ 個のうちの部分集合 $\{f_\alpha\}$, $\alpha=1,2,\cdots,r<2N$，のみで関数群をつくるとき，

---

*) 必要な回数だけの微分可能性は仮定しておく．

それを部分群という*).

いま，階数が r と s の2つの関数群 $\{f_\alpha\}$, $\{g_\beta\}$ とが k 個の関数を共通に含んでいたとする．それを $f_\mu=g_\mu$ $(\mu=1,2,\cdots,k)$ としよう．すると

$$\{f_\mu, g_\nu\}=\varphi_{\mu\nu}(f_\alpha)=\psi_{\mu\nu}(g_\beta) \tag{6-6-2}$$

となるから，$\varphi_{\mu\nu}$ と $\psi_{\mu\nu}$ とは $f_\mu=g_\mu$ のみの同じ関数でなければならない．そうでなければ，上式は $\{f_{k+1},\cdots,f_r\}$ と $\{g_{k+1},\cdots,g_s\}$ との間に関係をつけることになり，基底をうまく選べば，k 個以上の共通関数が存在することになるからである．このとき集合 $\{f_\mu=g_\mu\}$ $(\mu=1,\cdots,k)$ は P. b. について閉じることになるから，それぞれの群の中で部分群をつくることになる．

次に，互いに相反な関数群について述べる．微分方程式

$$\boldsymbol{X}_{f_\alpha}g=-\{f_\alpha, g\}=0 \qquad (\alpha=1,\cdots,r) \tag{6-6-3}$$

を考える．$\{f_\alpha\}$ は関数群とする．Jacobi の恒等式を用いて

$$\begin{aligned}\{f_\alpha,\{f_\beta,g\}\}-\{f_\beta,\{f_\alpha,g\}\}&=\{\{f_\alpha,f_\beta\},g\}\\&=[\boldsymbol{X}_{f_\alpha},\boldsymbol{X}_{f_\beta}]g=0\end{aligned} \tag{6-6-4}$$

により，(6-6-3) の $\boldsymbol{X}_{f_\alpha}$ は完全系をつくる．したがって，(6-6-3) は Frobenius の定理により完全積分可能であり，$2N-r$ 個の独立な積分が存在する．それを g_μ $(\mu=1,\cdots,2N-r)$ とする．再び Jacobi の恒等式により

$$\boldsymbol{X}_{f_\alpha}\{g_\mu,g_\nu\}=-\{f_\alpha,\{g_\mu,g_\nu\}\}=\{g_\mu,\{g_\nu,f_\alpha\}+\{g_\nu,\{f_\alpha,g_\mu\}\}=0\,.$$

よって $\{g_\mu,g_\nu\}$ もまた $\boldsymbol{X}_{f_\alpha}$ の解であるから，g_μ らの関数となり，集合 $\{g_\mu\}$ は関数群をつくる．しかも，(6-6-3) から明らかなように，2つの群 $\{f_\alpha\}$ と $\{g_\mu\}$ とは互いに P. b. が消える，いわゆる互いに包合 (involutive) の関係にある**).

かくして次の定理を得る．

定理 6-4

階数が r の関数群 $\{f_\alpha\}$ が存在するとき，$\{f_\alpha\}$ と (狭義の) 包合の関係にある $2N-r$ 個の独立な関数 g_μ が存在し，$\{g_\mu\}$ は階数が $2N-r$ の関数群をつくる．

このような2つの関数群は相反 (reciprocal) の関係にあるという．

---

*)　n 変数 x^i の関数の全体は x^i を基底とする階数 n の関数群 G_n をつくる．したがって，階数 $r<n$ の関数群 G_r は G_n の部分群である．

**)　$\{f_1,f_2\}=0$ のとき，f_1,f_2 は互いに包合の関係にあるというが，これは狭義の「包合」である．広義には $\{f_\alpha,f_\beta\}\equiv 0 \mod(f_r)$ $(\alpha,\beta,\gamma=1\sim r)$ のとき $\{f_\alpha\}$ も包合系という．

次に関数群の基底として正準基底をとることができることを示す．いま階数が r の関数群 G_r の基底関数を $\{f_\alpha\}$ $(\alpha=1\sim r)$ とすると

$$-\{f_\alpha, f_\beta\}\in G_r \qquad (\alpha, \beta=1\sim r). \tag{6-6-5}$$

f_α らのある関数 $F(f)$ と f_α との P. b. は次のように書ける．

$$-\{f_\alpha, F\}=\boldsymbol{X}_\alpha F=\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial p_i}\frac{\partial f_\beta}{\partial q^i}-\frac{\partial f_\alpha}{\partial q^i}\frac{\partial f_\beta}{\partial p_i}\right)\frac{\partial F}{\partial f_\beta}=-\{f_\alpha, f_\beta\}\frac{\partial F}{\partial f_\beta}, \tag{6-6-6}$$

ここに

$$\boldsymbol{X}_\alpha\equiv X_{f\alpha}=\frac{\partial f_\alpha}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i}-\frac{\partial f_\alpha}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}=-\{f_\alpha, f_\beta\}\frac{\partial}{\partial f_\beta}. \tag{6-6-7}$$

そこで，F を未知関数とする微分方程式

$$\boldsymbol{X}_\alpha F=-\{f_\alpha, f_\beta\}\frac{\partial F}{\partial f_\beta}\equiv-\varphi_{\alpha\beta}\frac{\partial F}{\partial f_\beta}=0 \tag{6-6-8}$$

において，$\varphi_{\alpha\beta}$ は (6-6-5) によって $\{f_\alpha\}$ のみの関数である．したがって，(6-6-8) の解 F は $\{f_\alpha\}$ のみで表される．しかも，

$$[\boldsymbol{X}_\alpha, \boldsymbol{X}_\beta]=\boldsymbol{X}_{\{f_\beta, f_\alpha\}}=\boldsymbol{X}_{\varphi_{\beta\alpha}} \tag{6-6-9}$$

であり，$\varphi_{\alpha\beta}$ が f_α の関数であるから，$\boldsymbol{X}_{\varphi_{\alpha\beta}}$ は $\boldsymbol{X}_\alpha$ の 1 次結合で表される．したがって

$$\{\boldsymbol{X}_\alpha\}：完全系 \tag{6-6-10}$$

となる．よって (6-6-8) は完全積分可能である．いま行列 $\varphi_{\alpha\beta}$ の階数を $r-r_1$ とすると，(6-6-8) は $r-r_1$ 個の独立な方程式であるから，r_1 個の独立な解 $F_\mu(f)$ が存在する．2 つの解を F_μ, F_ν とすると，Jacobi の恒等式により $\{F_\mu, F_\nu\}$ もまた (6-6-8) の解である．

(6-6-8) により F_μ はすべての f_α と狭義の包合の関係にある $\{f_\alpha\}$ の関数であるから，G_r の中で階数が r_1 の特異部分群 (singular subgroup) をつくる*)．

正準基底に関する次の定理がある．

定理 6-5

包合系でない関数群 G_r の基底 ϕ_α を

$$\varphi_{\alpha\beta}\equiv\{\phi_\alpha, \phi_\beta\}=1 \qquad あるいは \qquad 0$$

*）G_r のすべての要素と狭義の包合の関係にある G_r の要素を特異関数 (singular function) という．

となるようにとることができる．

（**証明**）　G_r は包合系でないから，少なくとも1つは $\varphi_{\alpha\beta} \neq 0$ なる ϕ_α がある．それを ϕ_1 とする．そこで微分方程式

$$\boldsymbol{X}_{\phi_1}\boldsymbol{\Phi} = \varphi_{1\alpha}\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \phi_\alpha} = 1 \tag{6-6-11}$$

の解 $\boldsymbol{\Phi}$ は ϕ_1 以外の ϕ_α も含む．なぜならば，ϕ_1 のみの関数ならば $\varphi_{11}=0$ であるから矛盾する．

(6-6-11) の解を ψ^1 とすると

$$\{\psi^1, \phi_1\} = 1 \tag{6-6-12}$$

となる．そこで ϕ_1, ψ^1 と他の $r-2$ 個の独立関数を G_r の基底に選ぶことにする．

次に，

$$\left.\begin{aligned} -\boldsymbol{X}_{\phi_1}\boldsymbol{\Phi} &= \{\phi_1, \boldsymbol{\Phi}\} = \{\phi_1, \psi^1\}\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \psi^1} + \varphi_{1\sigma}\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \phi_\sigma} = 0 \qquad (\sigma = 3 \sim r) \\ -\boldsymbol{X}_{\psi_1}\boldsymbol{\Phi} &= \{\psi_1, \boldsymbol{\Phi}\} = \{\psi^1, \phi_1\}\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \phi_1} + (\psi_1, \phi_\sigma)\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \phi_\sigma} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{6-6-13}$$

を考える．

$$[\boldsymbol{X}_{\phi_1}, \boldsymbol{X}_{\psi_1}] = \boldsymbol{X}_{\{\psi_1, \phi_1\}} = 0 \tag{6-6-14}$$

であるから (6-6-13) は積分可能である．その解は $r-2$ 個あって，$\bar{\phi}_3, \bar{\phi}_4, \cdots, \bar{\phi}_r$ とする．これら $\bar{\phi}_\sigma$ は $\phi_1, \psi^1, \phi_3, \cdots, \phi_r$ の関数であるから G_r の要素である．しかるに，$\{\bar{\phi}_\sigma, \bar{\phi}_{\sigma'}\}$ も Jacobi 恒等式により (6-6-13) の解であるから，$\{\bar{\phi}_\sigma\}$ $(\sigma = 3 \sim r)$ は G_r の部分群をつくる．もし $\bar{\phi}_\sigma$ がすべて互いに狭義包合的ならば，ϕ_1, ψ^1 と $\bar{\phi}_\sigma$ は狭義包合の関係にあるから

$$\phi_1, \quad \psi^1, \quad \bar{\phi}_3, \quad \cdots, \quad \bar{\phi}_r$$

が求める基底である．

$\bar{\phi}_\sigma$ が狭義包合系でないときは，上の手続きを繰り返し，残る関数が狭義包合系になるまで行う．最後に，それらを

$$\phi_1, \quad \psi^1, \quad \phi_2, \quad \psi^2, \quad \cdots, \quad \phi_m, \quad \psi^m, \quad \phi_{m+1}, \quad \cdots, \quad \phi_r \tag{6-6-15}$$

と記すことにすると，

$$\begin{aligned} &\{\psi^\mu, \phi_\nu\} = \delta_\nu^\mu \qquad (\mu, \nu = 1 \sim m) \\ &\{\phi_\alpha, \phi_{m+\sigma}\} = \{\psi^\mu, \phi_{m+\sigma}\} = 0 \qquad (\alpha = 1 \sim r,\ \sigma = 1 \sim r - m) \end{aligned} \tag{6-6-16}$$

となる．これら ϕ_μ, ψ^μ が正準基底である．$\phi_{m+1}, \cdots, \phi_r$ は G_r の特異関数であり，G_r の相反群に属する．（証明終わり）

(6-6-15) は正準変換により $P_1, Q^1, P_2, Q^2, \cdots, P_m, Q^m, P_{m+1}, \cdots, P_r$ ととれることは次の定理により明らかとなる．

最後に，G_r に独立な関数を付け加えることにより，$2N$ 個の正準基底をつくる方法を与える定理を述べる．

定理 6-6

狭義包合系でない関数群 G_r に関数を付け加えることにより，正準基底

$$\{\psi^s, \phi_{s'}\}=\delta^s{}_{s'}, \quad \{\psi^s, \psi^{s'}\}=\{\phi_s, \phi_{s'}\}=0 \qquad (s=1, \cdots, N) \qquad (6\text{-}6\text{-}17)$$

をつくることができる．

（**証明**）G_r の階数を r とし，その基底として (6-6-16) をとる．そして，たとえば ϕ_{m+1} を G_r から除いたものを考えると，その集合は G_r の部分群 G_{r-1} をつくる．すると G_{r-1} はその相反群 $\bar{G}_{2N-r+1}$ を決定する．ϕ_{m+1} は G_{r-1} のすべての要素と狭義包合関係にあるから定理 6-4 により

$$\phi_{m+1} \in \bar{G}_{2N-r+1}.$$

$\bar{G}_{2N-r+1}$ の中には $\{\bar{\phi}, \phi_{m+1}\} \neq 0$ なる $\bar{\phi}$ が存在する．なぜならば，もし存在しなければ，$\overline{G}_{2N-r+1}$ は，G_{r-1} はもとより ϕ_{m+1} とも狭義包合の関係にあることになり，G_r と狭義包合の関係になる．すると $\overline{G}_{2N-r}$ と同じものになり矛盾するからである．

$\bar{\phi}$ として ψ^{m+1} をとり，$\{\psi^{m+1}, \phi_{m+1}\}=1$ となるようにする．それは (6-6-11), (6-6-12) で行ったように，常に可能である．ψ^{m+1} は $\bar{G}_{2N-r+1}$ に属するから

$$\{\psi^{m+1}, G_{r-1}\}=0$$

となり，ψ^{m+1} は G_{r-1} の要素とは独立である．よって G_r に ψ^{m+1} を付け加えることにより

$$\phi_1, \quad \psi^1, \quad \cdots, \quad \phi_m, \quad \psi^m, \quad \phi_{m+1}, \quad \psi^{m+1}, \quad \phi_{m+2}, \quad \cdots, \quad \phi_r$$

を得る．

この手続きを繰り返すことにより，最後に (6-6-17) に達する．（証明終わり）

正準変換は P. b. を不変にするものであるから，(6-6-17) において $\psi^s=Q^s, \phi_s=P_s$ にとれる．そのうちの $Q^1, \cdots, Q^m$, $P_1, \cdots, P_m$, $P_{m+1}, \cdots, P_r$ が (6-6-15) の ψ^σ, ϕ_r である．

例 6-7

球対称な力学系では，例6-6で述べたように，角運動成分 L_α ($\alpha=1,2,3$) は第1積分であり，

$$\{L_\alpha, L_\beta\}=\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}L_\gamma$$

であるから，$\{L_\alpha\}$ は関数群 G_3 をつくる．L_α は回転を生成する母関数であるから，この G_3 に相反な関数群 G_{2N-3} はスカラー関数である．したがって，残りの第1積分はすべてスカラー関数である．

$$f_\sigma \in G_{2N-3}, \quad \begin{aligned} &\{f_\sigma, L_\alpha\}=0\,, \\ &\{\{f_\sigma, f_{\sigma'}\}, L_\alpha\}=0\,. \end{aligned}$$

例 6-8

運動方程式を解き，運動を完全に決定するには $2N$ 個の第1積分が求まればよいが，一般に第1積分を全部求めることは大変困難である．しかし，もし狭義包合系をなす N 個の第1積分が求まれば，積分計算と代数計算のみで運動が決定される．

$F_i(q,p)$ ($i=1,2,\cdots,N$) を狭義の包合系をなす第1積分とする；$F_i=c_i$,

$$\{F_i, F_j\}=0\,. \tag{6-6-18}$$

$\{F_i\}$ は狭義の包合的関数群である．すると

$$F_i(q,p)=P_i(=c_i) \tag{6-6-19}$$

なる正準変換が存在し，母関数 $W(q,P)=W(q,c)$ を用いて

$$p_i=\frac{\partial W}{\partial q^i}, \quad Q^i=\frac{\partial W}{\partial P_i}=\frac{\partial W(q,c)}{\partial c_i}\,. \tag{6-6-20}$$

となる．

$P_i=c_i$ は運動の定数だから，このような P_i の正準座標 Q^i は変換後のHamilton関数 K の循環座標である．したがって，

$$K=K(P)=K(c). \tag{6-6-21}$$

W が t に陽に依存しなければ $K(P)$ は $H(q,p)$ を P_i で書き換えたものである．

しかるに，W が t を陽に含まぬとき，(6-6-20) はこの場合

$$dW(q,P)=p_i dq^i+Q^i dP_i \tag{6-6-22}$$

となる．P_i に c_i を代入して，結局

$$dW(q,c)=p_i(q,c)dq^i \tag{6-6-23}$$

を得る．よって

$$W(q, c)=\int p_i(q, c)dq^i+c_0. \tag{6-6-24}$$

（6-6-21）と正準方程式により

$$Q^i=\frac{\partial K}{\partial c_i}t+a^i, \tag{6-6-25}$$

a^i は定数．すると，（6-6-20）と（6-6-24）を用いて

$$\frac{\partial K}{\partial c_i}t+a^i=\int\frac{\partial p_j}{\partial c_i}dq^j \tag{6-6-26}$$

を得る．これと（6-6-19）の $2N$ 個の式とから，q^i, p_i が t, c_i, a^i の関数として定まる．

§ 6-7　Hamilton-Jacobi 方程式

正準方程式の積分をこれまでとは別の角度から見た Hamilton-Jacobi の方程式を論じよう．

§ 4-4 ですでに言及したように，基本 1-形式 Ω の外微分は運動方程式のもとで消えることから，主関数 $W(q, t)$ が存在し，Hamilton-Jacobi 方程式が導かれる．すなわち，運動の経路 c 上で

$$d_*\Omega\,|_c={}_*\theta_i\wedge{}_*\rho^i|_c=0 \rightarrow {}_*\Omega\,|_c=dW. \tag{6-7-1}$$

c 上では p_i は q^i の関数で表されるから，W は q^i, t の関数と見なせる．すると，上式より得られる式

$$p_idq^i-H(q, p, t)dt=dW(q, t) \tag{6-7-2}$$

から

$$\frac{\partial W}{\partial t}+H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}, t\right)=0, \tag{6-7-3}$$

$$p_i=\frac{\partial W(q, t)}{\partial q^i} \tag{6-7-4}$$

を得る．これが Hamilton-Jacobi の方程式である．

正準形式では，q^i と p_i は対称的であるから，両者の役割を入れ替えて，

$$\frac{\partial \widetilde{W}(p, t)}{\partial t}+H\left(-\frac{\partial \widetilde{W}}{\partial p}, p, t\right)=0 \tag{6-7-5}$$

$$q^i=-\frac{\partial \widetilde{W}}{\partial p_i},\quad \widetilde{W}=W-p_iq^i \tag{6-7-6}$$

とすることもできる．以下 (6-7-3)，(6-7-4) を扱う．

Hamilton-Jacobi 方程式を解くために，(6-7-3)，(6-7-4) と同値な 1-形式

$$\pi\equiv dW-p_idq^i+H(q,p,t)dt=dW-\Omega=0 \tag{6-7-7}$$

を定義し，これを積分して W を求める．この 1-形式はこのままでは積分可能でないから，いかなる条件のもとで積分可能となるかをまず求めねばならない．

一般に，与えられた Pfaff 形式系が完全積分可能でないとき，それらに新たな 1-形式を追加することで積分可能な Pfaff 形式系をつくることができる．§6-1 の定理 6-1 で示したように，N 変数からなる $N-1$ 個の独立な Pfaff 形式は完全積分可能であるから，このことは常に可能である．こうして得られた Pfaff 形式系 $\{\omega^a\}$ を含む完全積分可能な Pfaff 形式系は第1章§1-4 で示した特性系である．

§1-4 の結果を用いて(6-7-7)の $\pi=0$ の特性系を求めよう．W, q^i, p_i, t を独立変数として扱うと，(1-4-28) において $a_i=(1,-p_i,0,H)$ となるから

$$\left.\begin{aligned}
&-dp_i-\frac{\partial H}{\partial q^i}dt-\lambda p_i=0,\\
&dq^i-\frac{\partial H}{\partial p_i}dt=0,\\
&\frac{\partial H}{\partial q^i}dq^i+\frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i+\lambda H=0,\\
&\lambda=0
\end{aligned}\right\} \tag{6-7-8}$$

を得る．上の第3式は独立な条件ではない．λ を消去し，もとの π と合わせると

$$\left.\begin{aligned}
&dq^i-\frac{\partial H}{\partial p_i}dt=0,\\
&dp_i+\frac{\partial H}{\partial q^i}dt=0,\\
&\pi=dW-p_idq^i+Hdt=0
\end{aligned}\right\} \tag{6-7-9}$$

が π の特性系である．この結果は，$\pi=0$ は運動方程式と合わせて完全積分可能であることを示している．それは，主関数 W の存在条件，すなわち Hamilton-Jacobi 方程式の積分可能条件であったから，当然の結果である．

(6-7-9) の生成系は次式で与えられる；

$$X=\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i}-\frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}+\left(p_i\frac{\partial H}{\partial p_i}-H\right)\frac{\partial}{\partial W}+\frac{\partial}{\partial t}. \tag{6-7-10}$$

時間 t をパラメータとし，X によって生成される変換で，初期値 $W_0, q_0{}^i, p_i{}^0$，$t_0=0$ は

$$W(W_0, q_0, p_0, t),\quad q^i(q_0, p_0, t),\quad p_i(q_0, p_0, t)$$

へと移動する．

他方，(6-7-9) の第 3 式より

$$\frac{dW}{dt}=p_i\dot{q}^i-H=p_i\frac{\partial H}{\partial p_i}-H=L(q, p, t) \tag{6-7-11}$$

が導かれるから

$$W=W_0+\int_0^t L(q(q_0, p_0, t), p(q_0, p_0, t), t)dt \tag{6-7-12}$$

を得る．

Hamilton-Jacobi 方程式は $N+1$ 変数 q^i, t の偏微分方程式であるから，$N+1$ 個の積分定数を含む解

$$W=W(q, t, a_0, a_1, \cdots, a_N) \tag{6-7-13}$$

が得られれば，それは完全解である．しかるに，W は方程式の中には微分形でしか現れないので，積分定数の 1 つ a_0 は付加定数である．よって

$$W=W(q, t, a_1, a_2, \cdots, a_N)+a_0\equiv W(q, t, a)+a_0 \tag{6-7-14}$$

となる．

ところで，主関数 W は正準変換の母関数でもある．(6-7-3) を母関数 W によって，q^i, p_i から Q^i, P_i への正準変換の結果と見ると，変換後の Hamilton 関数 $K(Q, P, t)$ は (5-5-10) によって

$$K=H+\frac{\partial W}{\partial t}=0 \tag{6-7-15}$$

ということになる．すると，正準運動方程式により

$$\dot{Q}^i=\frac{\partial K}{\partial P_i}=0,\quad \dot{P}_i=-\frac{\partial K}{\partial Q^i}=0 \tag{6-7-16}$$

となるから，Q^i, P_i は定数である；

$$Q^i=a^i,\quad P_i=b_i. \tag{6-7-17}$$

正準方程式は微小正準変換であるから，この変換を初期値 $q_0{}^i, p_{0i}$ からの変換と見

なせば，積分定数 a^i は初期値 $q_0{}^i$ となるので(6-7-15)より

$$b_i = -\frac{\partial W(q, t, a)}{\partial a^i} \tag{6-7-18}$$

を得る．この式を q^i について解けば

$$q^i = q^i(t, a, b) \tag{6-7-19}$$

によって運動が決定される．p_i は (6-7-4) により与えられる．

例 6-9

H が t によらぬとき，t は変数分離できる．

$$W = -Et + S(q) \qquad E：定数$$

とおき，(6-7-3)，(6-7-4) に代入すると

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = E, \quad p_i = \frac{\partial S}{\partial q^i}.$$

したがって p_i は $S(q) =$ 一定 の描く曲面の法線である．

第7章　場の理論への拡張

§ 7-1　質点系と場の系の対応

これまでは，有限自由度の質点系について理論を展開してきたが，空間に連続的に分布して存在する場の運動も力学の対象としなければならない．場の理論としては，重力場，電磁場，Yang-Mills 場，核力場など多く知られている．

場という実体を力学的に記述するには，空間の各点における場の強さの時間的変化を問題にすることになるから，自由度が無限大の力学系を扱わねばならない．空間の各点各点に質点が連続的に分布していると思えばよい．したがって，質点系の力学変数 $q^i(t)$ の代わりに $\phi^a(x)$ という場の量がくる．x は空間座標 $\boldsymbol{x}$ と時間座標 $x^0=ct$ をまとめて表記したものである．a は場の成分を表すが，a はベクトル成分やスピノール成分のように場のスピン自由度を表すと同時に，荷電スピンなどのように場の内部自由度も含めた成分を代表するものとする．したがって場 $\phi^a(x)$は，空間の各点 $\boldsymbol{x}$ に a のとりうる数の自由度を有することになるから，$q^i(t)$ の自由度を表す i が ϕ の空間座標 $\boldsymbol{x}$ と a に対応する．

質点系で定式化した前章までの議論は，この自由度の違いを考慮すれば，ほとんどそのまま通用する．しかし，場の理論には，$\phi^a(x)$ の時間微分ばかりでなく，空間微分も現れる．そして時空に関する Lorentz 変換のもとでの共変性を保つように要請すると，質点系のときにはなかった様相が少し加わる．本章では質点系の定式化を場の理論に移すときの手続きを述べ，さらに，質点系にはなかった新たに付け加えるべきところを簡単に言及することにする．

まず，力学変数の対応は

$$q^i(t) \to \phi^a(x),$$

i は $(\boldsymbol{x}, a)$ に対応するから，自由度 i についての和は

$$\sum_i \to \int d^3x \sum_a \qquad \text{（積分は全空間）}$$

となる．速度位相（状態）空間での力学変数は*)

$$\phi^a(x), \quad \partial_0\phi^a(x) \equiv \dot{\phi}^a(x) \equiv \xi^a(x)$$

であって，空間微分 $\partial\phi^a(x)/\partial x^i$ は独立な力学変数ではない．位相空間での力学変数はいうまでもなく

$$\phi^a(x), \quad \pi_a(x) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}^a(x)}$$

である．

以後の議論では Lorentz 空間の計量テンソルを $\eta_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$ とする．そして，記号を簡単化するために $\partial\phi^a(x)/\partial x^\mu = \phi,_\mu{}^a(x)$ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ と略記する．場の成分は $a = 1 \sim A$ とする．

Lagrange 関数はその変数を全部書くと $L(\phi^1(x), \cdots, \phi^A(x), \phi,_\mu{}^1(x), \cdots, \phi,_\mu{}^A(x))$ となるが，$L(\phi, \phi,_\mu)$ と略記する**)．第 2 章で行った変分原理から導いたPoincaré-Cartan の不変形式（基本 1-形式）は，上記の対応から

$$\left.\begin{aligned} \Omega &= \int d^3x \left[\pi_a d\phi^a(x) - E(\phi, \phi,_\mu) dt\right], \\ E &= \pi_a \xi^a - L \end{aligned}\right\} \tag{7-1-1}$$

となる．

接バンドル TQ のベクトル場の基底は

$$\frac{\partial}{\partial\phi^a(x)}, \quad \frac{\partial}{\partial\xi^a(x)}$$

であって，$\partial/\partial\phi,_i{}^a(x)$ は含まれない．したがって，$TQ \times \boldsymbol{R}$ 空間でのベクトル場は次の表式をとる

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + \int d^3x \left(M^a \frac{\partial}{\partial\xi^a(x)} + N^a \frac{\partial}{\partial\phi^a(x)}\right). \tag{7-1-2}$$

また微分形式とベクトル場との内積は，同時刻のところで

---

*) 以後 x^μ による微分 $\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$ を ∂_μ と記す．

**) あまり本質的でない複雑さを避けるために，特に断らない限り L は x^μ に陽に依存しないとする．

$$\left.\begin{aligned}
&\left\langle d\phi^a(x), \frac{\partial}{\partial\phi^b(x')}\right\rangle_{x^0=x^{0'}} = \delta_b{}^a\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),\\
&\left\langle d\xi^a(x), \frac{\partial}{\partial\xi^b(x')}\right\rangle_{x^0=x^{0'}} = \delta_b{}^a\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),\\
&\left\langle d\phi_{,i}{}^a(x), \frac{\partial}{\partial\phi^b(x')}\right\rangle_{x^0=x^{0'}} = \delta_b{}^a\partial_i\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),\\
&\left\langle d\xi_{,i}{}^a(x), \frac{\partial}{\partial\xi^b(x')}\right\rangle_{x^0=x^{0'}} = \delta_b{}^a\partial_i\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),\\
&\text{これ以外は } 0 .
\end{aligned}\right\} \tag{7-1-3}$$

と定義する．したがって，たとえば

$$\int d^3x'\left\langle F_a(x)d\phi_{,i}{}^a(x), N^b(x')\frac{\partial}{\partial\phi^b(x')}\right\rangle_{x^0=x^{0'}} = F_a(x)\partial_i N^a(x) \tag{7-1-4}$$

となる．

運動方程式は § 3-1 で行ったように基本 1-形式 $\boldsymbol{\Omega}$ から導かれるが，$d\boldsymbol{\Omega}$ を次のように変形する必要がある．

$$d\boldsymbol{\Omega} = \int d^3x\left[d\pi_a(x)\wedge d\phi^a(x) - \left(\xi^a(x)d\pi_a(x) - \frac{\partial L}{\partial\phi^a(x)}d\phi^a(x) - \frac{\partial L}{\partial\phi_{,i}{}^a}d\phi_{,i}{}^a\right)\wedge dt\right]$$

の最後の項の $d\phi_{,i}{}^a=\partial_i d\phi^a$ を部分積分し，無限遠で $(\partial L/\partial\phi_{,i}{}^a)d\phi^a$ が消えるとすると，上式は

$$d\boldsymbol{\Omega} = \int d^3x\left[d\pi_a\wedge d\phi^a - \left\{\xi^a d\pi_a - \left(\frac{\partial L}{\partial\phi^a} - \partial_i\left(\frac{\partial L}{\partial\phi_{,i}{}^a}\right)\right)d\phi^a\right\}\wedge dt\right] \tag{7-1-5}$$

となる．これから

$$d\boldsymbol{\Omega} = \int d^3x\ \theta_a(x)\wedge\rho^a(x), \tag{7-1-6}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\theta_a(x) = d\pi_a(x) - \left(\frac{\partial L}{\partial\phi^a(x)} - \partial_i\left(\frac{\partial L}{\partial\phi_{,i}{}^a}\right)\right)dt,\\
&\rho^a(x) = d\phi^a(x) - \xi^a(x)dt
\end{aligned}\right\} \tag{7-1-7}$$

を得る．また，例3-1に示したように，(7-1-7) の運動方程式は $d\boldsymbol{\Omega}$ とベクトル場との内積

$$i(\partial/\partial\xi^a(x))d\boldsymbol{\Omega}=0, \quad i(\partial/\partial\phi^a(x))d\boldsymbol{\Omega}=0$$

からも導かれる．この運動方程式の生成系 X_t は § 3-1 と同様の処法で

$$X_t = \frac{\partial}{\partial t} + \int d^3x\left(M^a\frac{\partial}{\partial\xi^a(x)} + \xi^a(x)\frac{\partial}{\partial\phi^a(x)}\right), \tag{7-1-8}$$

$$M^a=-(A^{-1})^{ab}\left[\frac{\partial\pi^b}{\partial\phi^c}\xi^c(x)-\frac{\partial\pi^b}{\partial\phi_{,i}{}^c}\xi_{,i}{}^c(x)+\frac{\partial L}{\partial\phi^b(x)}-\partial_i\left(\frac{\partial L}{\partial\phi_{,i}{}^b(x)}\right)\right] \tag{7-1-9}$$

となる．ここに Hessian 行列 A_{ab} は汎関数微分によって定義され

$$A_{ab}(x,x')\equiv\frac{\delta}{\delta\phi_{,}{}^a{}_0(x)}\frac{\delta}{\delta\phi_{,}{}^b{}_0(x')}\int d^3x''L(\phi(x''),\phi_{,\mu}(x''))\Big|_{x^0=x^{0'}=x^{0''}}$$
$$=A_{ab}(\phi(x),\phi_{,\mu}(x))\delta^4(x-x') \tag{7-1-10}$$

であり，A^{-1} はその逆行列で

$$\int d^3x'A_{ab}(x,x')(A^{-1}(x',x''))^{bc}=\delta(x-x'')\delta_a^c \tag{7-1-11}$$

によって定義される．

位相空間における定式化も同様になされるので，改めて書くことはやめる．以上の拡張手続きに従えば，第2章以後の話はすべて，ほぼそのまま成り立つ．ただし，(7-1-7) や (7-1-9) に見られるように，空間微分の項が余分に付け加わる．そのために，§2-4，§2-5 の Noether の定理や §3-3 の Lagrange 関数の存在条件は少し変更を受ける．

§7-2　双　対　形　式

Noether の定理は場の理論では次のように変更される．作用積分は

$$J=\int_V d^4x\,L(\phi(x),\phi_{,\mu}(x)). \tag{7-2-1}$$

V は4次元の積分領域である．J の変分が

$$\delta J=\int d^4x\left[\left\{\frac{\partial L}{\partial\phi^a(x)}-\partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial\phi_{,\mu}{}^a(x)}\right)\right\}\delta\phi^a(x)+\partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial\phi_{,\mu}{}^a}\delta\phi^a(x)\right)\right]$$
$$=\int d^4x\,\partial_\mu F^\mu(\phi,\phi_{,\nu}(x)) \tag{7-2-2}$$

となるとき，運動方程式

$$[L]_a\equiv\frac{\partial L}{\partial\phi^a(x)}-\partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial\phi_{,\mu}{}^a(x)}\right)=0 \tag{7-2-3}$$

のもとで，保存則

$$\partial_\mu J^\mu\equiv\partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial\phi_{,\mu}{}^a}\delta\phi^a-F^\mu(\phi,\phi_{,\nu})\right)=0 \tag{7-2-4}$$

を得る．(7-2-4) が (2-4-14) に対応するものである．

4 次元発散 $\partial_\mu J^\mu$ を外微分を用いて書き表してみよう．そのために，双対形式への変換作用素と呼ばれる作用素 $*$ を導入する[*]．n 次元空間での k-形式と $(n-k)$-形式のベクトル空間をそれぞれ $\overset{k}{\wedge} T^*$ と $\overset{n-k}{\wedge} T^*$ とする．いま

$$\lambda \in \overset{k}{\wedge} T^*, \quad \mu \in \overset{n-k}{\wedge} T^* \tag{7-2-5}$$

なる λ, μ をとって，$\lambda \wedge \mu$ をつくると，それは $\overset{k}{\wedge} T^*$ から $\overset{n}{\wedge} T^*$ への写像である．そこで

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= a\, dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \\ \mu &= a\, dx^{i_{k+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_n} \end{aligned}\right\} \tag{7-2-6}$$

としたとき，$\lambda \wedge \mu \neq 0$ となるのは $i_1 \cdots i_k, i_{k+1} \cdots i_n$ がすべて異なるときである．そのとき，完全反対称テンソル $\varepsilon_{i_1 \cdots i_n}$ を用いて

$$\mu = \frac{\pm 1}{(n-k)!} \varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_k i_{k+1} \cdots i_n} a\, dx^{i_{k+1}} \wedge dx^{i_{k+2}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_n} \tag{7-2-7}$$

と表される．(7-2-7) の符号 $\pm$ は $i_1, \cdots, i_n$ の順列によるばかりでなく，空間の方向づけや計量の符号にも依存する．(7-2-7) によって与えられる μ を $*\lambda$ と表記する．

線形写像

$$\lambda \to *\lambda \tag{7-2-8}$$

は $\overset{k}{\wedge} T^*$ から $\overset{n-k}{\wedge} T^*$ への写像で，明らかに

$$\overset{n}{\wedge} T^* \ni \lambda \wedge *\lambda = \pm a^2 dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

である．(7-2-8) の写像を $*$ 写像と呼ぶ．

n 次元 Euclid 空間では右手系をとると

$$\left.\begin{aligned} *dx^1 &= dx^2 \wedge dx^3 \wedge \cdots \wedge dx^n \\ *(dx^1 \wedge dx^3) &= -dx^2 \wedge dx^4 \wedge \cdots \wedge dx^n \end{aligned}\right\} \tag{7-2-9}$$

である．4 次元 Lorentz 空間においては $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ として[**]

$$*(dx^\mu \wedge dx^\nu) = \frac{1}{2} \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} \varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} dx^\rho \wedge dx^\sigma \tag{7-2-10}$$

$$\therefore \quad *(dx^1 \wedge dx^2) = -dx^3 \wedge dx^0$$

---

*）双対変換を星印作用素 (star operator) ともいう．

**）$\eta^{\mu\nu}$ は Lorentz 計量で $\eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho$．

$$*(dx^0\wedge dx^1)=-dx^2\wedge dx^3$$

とする．

この $*$ 作用素を用いて 4 次元発散 (7-2-4) を 1-形式で表すために

$$J\equiv J_\mu dx^\mu \tag{7-2-11}$$

とおく．すると

$$d(*J)=d\left(\frac{1}{3!}\eta^{\lambda\mu}\varepsilon_{\lambda\nu\rho\sigma}J_\mu dx^\nu\wedge dx^\rho\wedge dx^\sigma\right)$$

$$=\frac{1}{3!}\eta^{\lambda\mu}\varepsilon_{\lambda\nu\rho\sigma}\partial_\alpha J_\mu dx^\alpha\wedge dx^\nu\wedge dx^\rho\wedge dx^\sigma$$

となるが，上式で消えない項は $\alpha=\lambda$ のところだけであるから，

$$d(*J)=\partial^\mu J_\mu\frac{1}{4!}\varepsilon_{\lambda\nu\rho\sigma}dx^\lambda\wedge dx^\nu\wedge dx^\rho\wedge dx^\sigma$$

$$=\partial_\mu J^\mu(dx^0\wedge dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3) \tag{7-2-12}$$

を得る．

さらに，D'Alembert 演算子 $\Box=\partial_0{}^2-\partial_1{}^2-\partial_2{}^2-\partial_3{}^2$ も $*$ 作用素を用いると次のように表される．$\phi(x)$ を x の関数とすると

$$d\phi=\partial_\alpha\phi\cdot dx^\alpha,$$

$$*d\phi=\partial_\alpha\phi\frac{1}{3!}\eta^{\alpha\mu}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}dx^\nu\wedge dx^\rho\wedge dx^\sigma,$$

$$\therefore\quad d*d\phi=\partial_\alpha\partial_\beta\phi\cdot\frac{1}{3!}\eta^{\alpha\mu}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}dx^\beta\wedge dx^\nu\wedge dx^\rho\wedge dx^\sigma$$

$$=\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta\phi(dx^0\wedge dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3). \tag{7-2-13}$$

よって $d*d$ が $\Box$ を与える．

ちなみに，電磁場 $\boldsymbol{H}$ および $\boldsymbol{E}$ はベクトルポテンシャル $A_\mu(x)$ によって

$$\left.\begin{aligned}&F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu\,,\\&H_i=\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F^{jk},\quad E_i=F_{0i}\end{aligned}\right\} \tag{7-2-14}$$

と表される．すると，Maxwell 方程式

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}=-4\pi J^\nu \tag{7-2-15}$$

は 2-形式

$$F \equiv dA = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad A \equiv A_\mu dx^\mu \tag{7-2-16}$$

を用いて

$$d{*}F = d{*}dA = 4\pi {*}J \tag{7-2-17}$$

となる．J は (7-2-11) で定義された 1-形式である．

(7-2-17) を微分して，ただちに電流の保存則

$$d{*}J = 0 \to \partial_\mu J^\mu = 0 \tag{7-2-18}$$

を得る．

§ 7-3　場の理論における Lagrange 関数の存在条件

運動方程式が与えられたとき，その方程式を導く Lagrange 関数が存在するための必要・十分条件は，質点系の場合を § 3-3 と § 3-4 で詳しく論じた．場の理論でも本質的なところは質点系と同じであるが，ϕ^a の時空間微分 $\phi_{,\mu}^a$ のために，異質の項が現れる．その要点だけ説明しておこう．詳細は文献[1]を参照されたい．

運動方程式は $\phi^a(x)$ の 2 階微分 $\partial_\mu \partial_\nu \phi^a \equiv \phi_{,\mu\nu}^a$ を最高階とし，$\phi_{,\mu\nu}^a$ は 1 次とする．このとき運動方程式は一般に

$$\psi_a \equiv A_{ab}^{\mu\nu}(x, \phi, \phi_{,\lambda}) \phi_{,\mu\nu}^b + B_a(x, \phi, \phi_{,\mu}) = 0 \tag{7-3-1}$$

と書ける．$A_{ab}^{\mu\nu}$, B_a は x^μ, ϕ^a, $\phi_{,\mu}^a$ のある関数であり，

$$A_{ab}^{\mu\nu} = A_{ab}^{\nu\mu} \tag{7-3-2}$$

とする．(7-3-1) が Lagrange 関数 L から導かれた Lagrange 方程式*)

$$d_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial \phi_{,\mu}^a} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi_a} = 0 \tag{7-3-3}$$

であるならば，次の等式が成り立つ；

$$A_{\mu\nu}^{ab} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \phi_{,\mu}^a \partial \phi_{,\nu}^b} + \frac{\partial^2 L}{\partial \phi_{,\nu}^a \partial \phi_{,\mu}^b} \right), \tag{7-3-4}$$

$$B_a = \frac{\partial^2 L}{\partial \phi_{,\mu}^a \phi^b} \phi_{,\mu}^b + \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial \phi_{,\mu}^a} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi^a}. \tag{7-3-5}$$

---

*)　$F(x, \phi, \phi_{,\mu})$ に対して d_μ 作用は

$$d_\mu F \equiv \frac{\partial F}{\partial \phi_{,\nu}^a} \phi_{,\mu\nu}^a + \frac{\partial F}{\partial \phi^a} \phi_{,\mu}^a + \partial_\mu F$$

である．

このようなLが存在するための必要・十分条件は，§3-3で導いたと同じ方法で得られるが，ここでは$d^2L=0$を用いる代わりに拡張されたLegendre変換

$$J=\phi^a_{,\mu}\frac{\partial L}{\partial\phi^a_{,\mu}}-L \tag{7-3-6}$$

を導入し，

$$d^2J=0 \tag{7-3-7}$$

から導くことにする．ここに外微分dは$x^\mu, \phi^a, \phi^a_{,\mu}$に関する微分である．したがって，(7-3-7)における$d\phi^a_{,\mu}\wedge d\phi^b_{,\nu}, d\phi^a\wedge d\phi^b_{,\nu}, d\phi^a\wedge d\phi^b, dx^\mu\wedge d\phi^a$は独立成分であるから，それらの係数をそれぞれ0とおいて，次の条件を得る；

$$A^{\mu\nu}_{ab}+R^{\mu\nu}_{ab}+\frac{\partial}{\partial\phi^a_{,\mu}}(A^{\lambda\nu}_{cb}+R^{\lambda\nu}_{cb})\phi^c_{,\lambda}$$
$$=A^{\nu\mu}_{ba}+R^{\nu\mu}_{ba}+\frac{\partial}{\partial\phi^b_{,\nu}}(A^{\lambda\mu}_{ca}+R^{\lambda\mu}_{ca})\phi^c_{,\lambda}, \tag{7-3-8 a}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial\phi^a\partial\phi^b_{,\nu}}-\frac{\partial^2 L}{\partial\phi^b\partial\phi^a_{,\nu}}=\frac{\partial B_b}{\partial\phi^a_{,\nu}}-\frac{\partial}{\partial\phi^c}(A^{\nu\mu}_{ab}+R^{\nu\mu}_{ab})\phi^c_{,\mu}$$
$$-\partial_\mu(A^{\nu\mu}_{ab}+R^{\nu\mu}_{ab}), \tag{7-3-8 b}$$

$$\frac{\partial B_a}{\partial\phi^b}-\frac{\partial B_b}{\partial\phi^a}=\frac{\partial}{\partial\phi^c}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\phi^a_{,\mu}\partial\phi^b}-\frac{\partial^2 L}{\partial\phi^b_{,\mu}\partial\phi^a}\right)\phi^c_{,\mu}$$
$$+\partial_\mu\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\phi^a_{,\mu}\partial\phi^b}-\frac{\partial^2 L}{\partial\phi^b_{,\mu}\partial\phi^a}\right), \tag{7-3-8 c}$$

および

$$\partial_\mu B_a=\partial_\mu\left(\phi^b_{,\lambda}\frac{\partial^2 L}{\partial\phi^a_{,\lambda}\partial\phi^b}+\partial_\lambda\frac{\partial L}{\partial\phi^a_{,\lambda}}-\frac{\partial L}{\partial\phi^a}\right). \tag{7-3-8 d}$$

ここに

$$R^{\mu\nu}_{ab}\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\phi^a_{,\mu}\partial\phi^b_{,\nu}}-\frac{\partial^2 L}{\partial\phi^a_{,\nu}\partial\phi^b_{,\mu}}\right), \tag{7-3-9}$$

である．質点系ではμ, νは0成分しかないので$R^{\mu\nu}_{ab}$は0となり決して現れない．これが場の理論と質点系とで異なる最も重要な点である．

(7-3-8)からLを消去すると，(3-3-8)に対応する式として，次の必要・十分条件を得る；

$$A^{\mu\nu}_{ab}=A^{\mu\nu}_{ba}=A^{\nu\mu}_{ab}=A^{\nu\mu}_{ba}, \tag{7-3-10 a}$$

$$\frac{\partial B_a}{\partial \phi^b_{,\mu}}+\frac{\partial B_b}{\partial \phi^a_{,\mu}}=2\frac{\partial A^{\mu\nu}_{ab}}{\partial \phi^c}\phi^c_{,\nu}+2\partial_\nu A^{\mu\nu}_{ab}, \tag{7-3-10 b}$$

$$\frac{\partial B_a}{\partial \phi_b}-\frac{\partial B_b}{\partial \phi^a}=\frac{1}{2}\phi^c_{,\mu}\frac{\partial}{\partial \phi^c}\left(\frac{\partial B_a}{\partial \phi^b_{,\mu}}-\frac{\partial B_b}{\partial \phi^a_{,\mu}}\right)+\frac{1}{2}\partial_\mu\left(\frac{\partial B_a}{\partial \phi^b_{,\mu}}-\frac{\partial B_b}{\partial \phi^a_{,\mu}}\right), \tag{7-3-10 c}$$

$$R^{\mu\nu}_{ab}=-R^{\mu\nu}_{ba}=-R^{\nu\mu}_{ab}=R^{\nu\mu}_{ba}, \tag{7-3-10 d}$$

$$\frac{\partial A^{\mu\nu}_{ab}}{\partial \phi^c_{,\lambda}}-\frac{\partial A^{\mu\lambda}_{ac}}{\partial \phi^b_{,\nu}}=\frac{\partial R^{\mu\lambda}_{ac}}{\partial \phi^b_{,\nu}}-\frac{\partial R^{\mu\nu}_{ab}}{\partial \phi^c_{,\lambda}}, \tag{7-3-10 e}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \phi^c_{,\nu}}\left(\frac{\partial B_a}{\partial \phi^b_{,\mu}}-\frac{\partial B_b}{\partial \phi^a_{,\mu}}\right)-\left(\frac{\partial A^{\mu\nu}_{ac}}{\partial \phi^b}-\frac{\partial A^{\mu\nu}_{bc}}{\partial \phi^a}\right)$$
$$=\frac{\partial R^{\mu\nu}_{ac}}{\partial \phi^b}+\frac{\partial R^{\mu\nu}_{cb}}{\partial \phi^a}+\frac{\partial R^{\mu\nu}_{ba}}{\partial \phi^c}+\frac{\partial^2 R^{\lambda\mu}_{ab}}{\partial \phi^c_{,\nu}\partial \phi^d}\phi^d_{,\lambda}+\partial_\lambda\frac{\partial R^{\lambda\mu}_{ab}}{\partial \phi^c_{,\nu}}. \tag{7-3-10 f}$$

$R^{\mu\nu}_{ab}$ は μ,ν につき反対称であるから，運動方程式 (7-3-1) には現れないが，(7-3-10 d, e, f) により，$A^{\mu\nu}_{ab}$ と B_a によって表される．

(7-3-10) の各式から L を決定することができる．L として

$$L=K(x,\phi,\phi_{,\mu})+E^\mu_a(x,\phi)\phi^a_\mu+C(x,\phi)$$

とおき，K, E^μ_a, C の各項を与える式を結果のみ示すと，以下のようになる．

$$K=\int_0^1 d\tau\, \Psi^\mu_a(x,\phi,\tau\phi_{,\nu})\phi^a_{,\mu}, \tag{7-3-11}$$

$$\Psi^\mu_a\equiv\int_0^1 d\tau\,[A^{\mu\nu}_{ab}(x,\phi,\tau\phi_{,\lambda})+R^{\mu\nu}_{ab}(x,\phi,\tau\phi_{,\lambda})]\phi^b_{,\nu}. \tag{7-3-12}$$

$R^{\mu\nu}_{ab}$ は $A^{\mu\nu}_{ab}$ と B_a で表されるから上式により K が求まる．

$$E^\mu_a=\int_0^1 d\tau\,\tau Z^\mu_{[ab]}(x,\tau\phi^c)\phi^b+\frac{\partial G^\mu}{\partial \phi^a}, \tag{7-3-13}$$

$$Z^\mu_{[ab]}\equiv\frac{\partial^2 K}{\partial \phi^a\partial \phi^b_{,\mu}}-\frac{\partial^2 K}{\partial \phi^b\partial \phi^a_{,\mu}}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial B_a}{\partial \phi^b_{,\mu}}-\frac{\partial B_b}{\partial \phi^a_{,\mu}}\right)+\frac{\partial R^{\mu\nu}_{ab}}{\partial \phi^c}\phi^c_{,\nu}+\partial_\nu R^{\mu\nu}_{ab}. \tag{7-3-14}$$

K は (7-3-12) で与えられるので $Z^\mu_{[ab]}$ は既知である．G^μ は任意関数であるが，この不定性は L の不定性（発散 $\partial_\mu F^\mu$）と関係している．最後に C は次式で与えられる．

$$C=\int_0^1 d\tau\, Y_a(x,\tau\phi)\phi^a, \tag{7-3-15}$$

$$Y_a\equiv\partial_\mu E^\mu_a-B_a-\frac{\partial K}{\partial \phi^a}+\partial_\mu\frac{\partial K}{\partial \phi^a_{,\mu}}+\phi^b_{,\mu}\left[\frac{\partial^2 K}{\partial \phi^a\partial \phi^b_{,\mu}}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial B_a}{\partial \phi^b_{,\mu}}-\frac{\partial B_b}{\partial \phi^a_{,\mu}}\right)\right.$$

$$+\frac{\partial R_{ab}^{\mu\nu}}{\partial \phi^c}\phi^c_{,\nu}+\partial_\nu R_{ab}^{\mu\nu}\Big]. \tag{7-3-16}$$

(7-3-16) の右辺の K, E_a^μ は (7-3-11), (7-3-13) で求めたものを代入する．これで L の各項が求まった．

質点系のときと同じく，積分定数の不定性は L における発散 $\partial_\mu F^\mu$ の不定性に吸収できるので，$\partial_\mu F^\mu$ の不定性を除き L は一義的に決まる．ただし，(3-3-9) で述べた，運動方程式の積分因子 N_i^j にあたる N_a^b として，自明なつまらないもの以外に積分因子が存在すれば，それに応じて異なる L が得られる．

例 7-1

場の理論では $R_{ab}^{\mu\nu}$ が重要な役割をする簡単な例を示そう．4 つの内部自由度をもつスカラー場 ϕ^a $(a=1\sim4)$ からつくられる次の Lagrange 関数を考える；

$$L=\frac{1}{4!}\varepsilon_{abcd}\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}\phi^a_{,\lambda}\phi^b_{,\mu}\phi^c_{,\nu}\phi^d_{,\rho}\,g(\phi), \tag{7-3-17}$$

ここに $g(\phi)$ は ϕ^a の任意関数である．$\partial^2 L/\partial\phi^a_{,\lambda}\partial\phi^b_{,\mu}$ は λ, μ に対し反対称であるから，(7-3-4) により

$$A_{ab}^{\mu\nu}=0 \tag{7-3-18}$$

そして (7-3-5) により

$$B_a=\left[\frac{1}{3!}\varepsilon_{abcd}\frac{\partial g}{\partial\phi^e}-\frac{1}{4!}\varepsilon_{ebcd}\frac{\partial g}{\partial\phi^a}\right]\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}\phi^e_{,\lambda}\phi^b_{,\mu}\phi^c_{,\nu}\phi^d_{,\rho} \tag{7-3-19}$$

となる．$R_{ab}^{\lambda\mu}$ を見出すのに (7-3-10) を用いる．(7-3-18), (7-3-19) から

$$\varepsilon^{habc}\frac{\partial^2}{\partial\phi^c\partial\phi^f}\left[R_{ab}^{\mu\nu}-\frac{1}{2}\varepsilon_{abde}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\phi^d_{,\rho}\phi^e_{,\sigma}\,g(\phi)\right]\phi^f_{,\nu}=0$$

を得る．上式を満たす最も簡単なものとして

$$R_{ab}^{\mu\nu}=\frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\phi^c_{,\rho}\phi^d_{,\sigma}\,g(\phi) \tag{7-3-20}$$

とおく．これら $A_{ab}^{\mu\nu}$, $R_{ab}^{\mu\nu}$, B_a は (7-3-10) のすべての式を満たすことは容易に確かめうる．そして (7-3-11)～(7-3-16) から K, E_a^μ, C を求めると，(7-3-17) の L を再現する．

この例のように $A_{ab}^{\mu\nu}$ は消えても $R_{ab}^{\mu\nu}$ が残る場合がある．この点は質点系の力学と異なる重要なところである．

第8章　拘束系の力学

力学系に対しては，微分形で表される拘束条件が外部から課せられている場合が多い．第2章で述べたように，拘束条件のうち，ホロノーム拘束条件は積分できて，一般座標を適当に選ぶことによって除くことができた．積分不可能な非ホロノーム拘束条件のみが外部からの拘束条件として残った．一方，§2-5で示したように，無限小変換のパラメータが時間の任意関数の場合，この変換に対しLagrangianが不変のときは，Hessian行列 $A_{ij}=\partial^2 L/\partial\dot{q}^i\partial\dot{q}^j$ が正則でなく $\det(A_{ij})=0$ となり拘束条件が現れた．この拘束条件はホロノーム系においても現れ，外部拘束条件と異なり，Lagrangian 自身の性質によるもので，内的拘束条件とでも呼ぶべきものである．このような拘束系の力学の理論の定式化は，Diracにより，位相空間における正準形式の理論を拡張することによって試みられた．本書の目的は，前章まで展開したベクトル場による方法を土台にして拘束系の力学を定式化することにある．拘束系の力学理論には，いろいろな用語が従来用いられている．これらを説明するためには，Dirac の理論 [1] の紹介から始めるのが適当であろう．Dirac の理論の不十分な点を指摘し，これを改良するために，微分形式による Lagrange 形式，Hamilton 形式の展開が有効であることを示そう．

§ 8-1　特異 Lagrange 関数の系と Dirac のアルゴリズム

N個の自由度をもつ力学系を考える．一般座標を q^i $(i=1,\cdots,N)$，速度を $\dot{q}^i$ とし，系を記述する Lagrange 関数が

$$\det A_{ij}=0\ ;\ A_{ij}=\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^i\partial\dot{q}^j}\qquad(i,j=1,\cdots,N)\tag{8-1-1}$$

で，要素が A_{ij} の行列の階数が $(N-r)$ である場合を考えよう．正準運動量 $p_i=\partial L/\partial\dot{q}^i$ を $\dot{q}^j$ について解く際，$(N-r)$ 個の速度のみが独立である．このとき他の r 個の速度変数を消去すると，r 個の q^i, p_i 間の拘束条件式

$$\phi_\alpha(q, p, t) \approx 0 \;;\; \alpha = 1, \cdots, r \tag{8-1-2}$$

が生ずる．≈を用いたのは，拘束条件式のもとで成立する弱等式であることを示すためである．この弱等式に対する取り扱いについては（8-1-11）の後で述べる．Lagrange 関数の $\dot{q}^i$ 依存性のみに由来して生じた条件式は，**1次拘束条件式**と呼ばれている．簡単な例として

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^1\dot{q}^1 + q^1\dot{q}^2$$

の場合，行列（A_{ij}）は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ でその階数は1である．$p_1 = \dot{q}^1$；$p_2 = q^1$ で後者は $\dot{q}$ を含まず，拘束条件式である．

（8-1-2）で与えられた独立な r 個の1次拘束条件式をもつ力学系に対する正準形式の理論を Dirac に従って展開しよう．ここで§ 4-2の位相空間での変分原理に立ち帰る．作用積分

$$J[q, p] = \int_c \Omega = \int_c [p_i dq^i - H(q, p, t)dt] \tag{8-1-3}$$

の停留条件として，最小作用の原理が表され，(4-2-5)，すなわち

$$\delta J[q, p] = \int_c \left[\left(dq^i - \frac{\partial H}{\partial p_i}dt\right)\delta p_i - \left(dp_i + \frac{\partial H}{\partial q^i}dt\right)\delta q^i\right] = 0 \tag{8-1-4}$$

が得られた．われわれの考えている系には (8-1-2) で与えられた拘束条件が存在するため，上式の $\delta q^i, \delta p_i$ は次の式

$$\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial q^i}\delta q^i + \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_i}\delta p_i = 0 \tag{8-1-5}$$

を満たさなければならない．§ 2-2の非ホロノーム拘束条件のとき行った未定係数法を用いてこの拘束条件式を取り入れよう．

（8-1-5）に $v^\alpha dt$（v^α は未定係数）を掛けて α についての和をとったものを（8-1-4）から引くと

$$\delta J[q, p] = \int_c \left[\left\{dq^i - \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} + v^\alpha \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_i}\right)dt\right\}\delta p_i - \left\{dp_i + \left(\frac{\partial H}{\partial q^i} + v^\alpha \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial q^i}\right)dt\right\}\delta q^i\right] \tag{8-1-6}$$

となる．$\delta p_i, \delta q^i$ の係数を0とおいて

$$\rho^i \equiv dq^i - \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} + v^\alpha \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_i}\right) dt = 0, \tag{8-1-7 a}$$

$$\theta_i \equiv dp_i + \left(\frac{\partial H}{\partial q^i} + v^\alpha \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial q^i}\right) dt = 0 \tag{8-1-7 b}$$

を得る．Poisson 括弧式を使うと（(5-3-2) を参照)，上式は次のように書くことができる．

$$\dot{q}^i = \{q^i, H + v^\alpha \phi_\alpha\}, \quad \mathrm{mod}(\phi_\alpha), \tag{8-1-8 a}$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H + v^\alpha \phi_\alpha\}, \quad \mathrm{mod}(\phi_\alpha), \tag{8-1-8 b}$$

ただし，{ , } は通常のように q^i, p_i を独立変数とした Poisson 括弧（P.b.）で

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i}. \tag{8-1-9}$$

特に

$$\{q^i, p_j\} = \delta^i{}_j \ ; \ \{q^i, q^j\} = \{p_i, p_j\} = 0.$$

一般の力学量 $f(q, p, t)$ に対しては

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H_T\}, \quad \mathrm{mod}(\phi_\alpha) \tag{8-1-10}$$

となる．ただし

$$H_T = H + v^\alpha \phi_\alpha. \tag{8-1-11}$$

H_T は全 Hamilton 関数と呼ばれる．(8-1-8)，(8-1-10) の $\mathrm{mod}(\phi_\alpha)$ の意味は，拘束条件式 $\phi_\alpha \approx 0$ を考慮して等式が成立するということを示す．$\phi_\alpha \approx 0$ は Poisson 括弧をとった後に 0 とおけるという意味で**弱い等式**と呼ばれ，前に述べたように，= の代わりに ≈ を用いた．

力学量に対する運動方程式が (8-1-10) で規定されているので，拘束条件式 $\phi_\alpha \approx 0$ もこの運動方程式のもとで，時間とともに保たれなければならない．ϕ_α の定常性の要請は運動方程式が解をもつための必要条件である．すなわち

$$0 \approx \dot{\phi}_\alpha = \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial t} + \{\phi_\alpha, H\} + v^\beta \{\phi_\alpha, \phi_\beta\} \tag{8-1-12}$$

が**整合性の条件**と呼ばれる．この式が $\mathrm{mod}(\phi_\alpha)$ のもとで成り立たないときは，次の 2 つの場合が出てくる．(i) v^β を定める式になる場合．(ii) v^β を含まず新しい拘束条件式が出る場合，すなわち

$$\chi_k(q, p, t) \approx 0 \qquad (k = 1, \cdots, K') \tag{8-1-13}$$

を要請する場合である．このように1次拘束条件ϕ_αの定常条件から派生する条件式を**2次拘束条件式**と呼ぶ．さらに，この条件式に対する整合性の条件式

$$0\approx\frac{\partial\chi_k}{\partial t}+\{\chi_k, H\}+v^\beta\{\chi_k, \phi_\beta\} \tag{8-1-14}$$

より，v^βの中のあるものが定まるか，新しい条件式が生ずる．この操作を繰り返して，新しい条件が出ないようになって，整合性の条件が満たされる．このようにして出てきたK個（$K\geq K'$）の2次拘束条件式をまとめて，

$$\chi_k(q, p, t)\approx 0 \qquad (k=1, \cdots, K) \tag{8-1-15}$$

と表すことにする．

ここでv^αを定める(i)の場合を議論するには，次のように拘束条件式を，Diracに従って分類するとよい．ある拘束条件式$\varphi\approx 0$が

$$\{\varphi, \phi_\alpha\}\approx 0, \quad \{\varphi, \chi_k\}\approx 0 \tag{8-1-16}$$

を満たすとき，$\varphi\approx 0$を**第1類拘束条件式**，(8-1-16)のどれか1つでも満たされていない条件式を**第2類拘束条件式**と呼ぶ．第1類および第2類拘束条件式の数は，条件式のとり方によって変わる．したがって，

$$\phi_\alpha=a_\alpha{}^\beta\phi_\beta+a_\alpha{}^l\chi_l\ ;\ \chi_k=a_k{}^\beta\phi_\beta+a_k{}^l\chi_l$$

のような線形結合をとり*)，できるだけ多くの拘束条件式が第1類になるようにする．たとえば，$p_1\approx 0$，$p_2+q^1\approx 0$，$q^1\approx 0$の3個があるとき，このままではすべて第2類であるが，第2式から第3式を引くことによって，$p_1\approx 0$，$p_2\approx 0$，$q^1\approx 0$となり，$p_2\approx 0$が第1類，$p_1\approx 0$，$q^1\approx 0$が第2類となる．

2つの第1類ϕ_α, ϕ_βのP.b. $\{\phi_\alpha, \phi_\beta\}$もまた第1類であることはJacobiの恒等式から明らかである．(ただし第2類拘束の2次式も第1類であることに注意)

以後，第1類のものを$\overset{(1)}{\phi}_\alpha, \overset{(1)}{\chi}_k$；第2類のを$\overset{(2)}{\phi}_\alpha, \overset{(2)}{\chi}_k$と書く．さらに前者をまとめて$\varphi_a$，後者をまとめて$\theta_s$と表し，

$$\varphi_a\approx 0\ ;\ a=1, \cdots, A,$$
$$\theta_s\approx 0\ ;\ s=1, \cdots, S.$$

整合性の条件は，結局次の2つの式で書かれる（$v^\alpha\phi_\alpha=\overset{(1)}{v}{}^\alpha\overset{(1)}{\phi}_\alpha+\overset{(2)}{v}{}^{\alpha'}\overset{(2)}{\phi}_{\alpha'}$），

$$\frac{\partial\varphi_a}{\partial t}+\{\varphi_a, H\}\approx 0, \tag{8-1-17}$$

$$\frac{\partial\theta_s}{\partial t}+\{\theta_s, H\}+\overset{(2)}{v}{}^{\alpha'}\{\theta_s, \overset{(2)}{\phi}_{\alpha'}\}\approx 0, \tag{8-1-18}$$

＊）　係数$a_\alpha{}^{\beta'}$等はq，pの関数でもよい．

α' は 1～S'（S' は $\overset{(2)}{\phi}_{\alpha'}$ の数で，$S'\leq S$）である．(8-1-18) を $\overset{(2)}{v}{}^{\alpha'}$ について解こう．この解は，この式の特解に次の同次方程式の解を加えたものである．まず同次式

$$\overset{(2)}{v}{}^{\alpha'}\{\theta_s, \overset{(2)}{\phi}_{\alpha'}\}=0, \quad s=1,\cdots,S$$

の解として，$\overset{(2)}{v}{}^{\alpha'}$ がすべて 0 でないものがあったとすると，$\overset{(2)}{v}{}^{\alpha'}\overset{(2)}{\phi}_{\alpha'}$ は φ_a, θ_s との P.b. が ≈0 となるので第 1 類の拘束となる．しかるに，われわれはすでにできるだけ多くの拘束条件式が第 1 類になるように線形結合をとっているので，θ_s の線形結合で新しく第 1 類になるということは矛盾である．したがって，同次式に対しては，すべての α' について $\overset{(2)}{v}{}^{\alpha'}=0$ で，解はない．特解を求めるため，

$$C_{st}=\{\theta_s, \theta_t\} \tag{8-1-19}$$

を要素とする行列 (C_{st}) を考える．$\det(C_{st})\neq 0$ が次のことから証明できる．もし $\det(C_{st})=0$ なら

$$u^s C_{st}=u^s\{\theta_s, \theta_t\}=0$$

を満たす u^s として，すべてが 0 でない u^s の組が存在する．したがって上と同じ理由で矛盾が生ずるので

$$\det(\{\theta_s, \theta_t\})\neq 0. \tag{8-1-20}$$

奇数次の反対称行列の行列式は 0 であるから，第 2 類拘束条件式の数，S，は偶数でなければならぬ．$\det(C_{st})\neq 0$ がわかったので

$$(C^{-1})^{t's}C_{st}=\delta^{t'}{}_t \tag{8-1-21}$$

を満たす C_{st} の逆行列 $(C^{-1})^{st}$ が存在する．(8-1-18) に $(C^{-1})^{ts}$ を掛け s について 1 から S までの和をとると，$t=\alpha'$ のとき

$$\overset{(2)}{v}{}^{\alpha'}=-(C^{-1})^{\alpha's}\left(\frac{\partial\theta_s}{\partial t}+\{\theta_s, H\}\right). \tag{8-1-22 a}$$

また，$t\neq\alpha'$ のとき

$$0\approx(C^{-1})^{ks}\left(\frac{\partial\theta_s}{\partial t}+\{\theta_s, H\}\right), \tag{8-1-22 b}$$

ここで k は θ_s の中の $\overset{(2)}{\chi}_k$ の添字にあたるものである．これから H_T の中の v^a の一部が定まり，(8-1-22 a) を $H_T=H+\overset{(1)}{v}{}^{\alpha}\overset{(1)}{\phi}_{\alpha}+\overset{(2)}{v}{}^{\alpha'}\overset{(2)}{\phi}_{\alpha'}$ に代入し，(8-1-22 b) を拘束条件として，

$$H_T=H+\overset{(1)}{v}{}^{\alpha}\overset{(1)}{\phi}_{\alpha}+\left(\frac{\partial\theta_s}{\partial t}+\{\theta_s, H\}\right)(C^{-1})^{s\alpha'}\overset{(2)}{\phi}_{\alpha'}$$

$$=H^{*}+\overset{(1)}{v}{}^{\alpha}\overset{(1)}{\phi}_{\alpha}+\frac{\partial\theta_s}{\partial t}(C^{-1})^{sa'}\overset{(2)}{\phi}_{a'} \tag{8-1-23}$$

ただし

$$H^{*}=H+\{\theta_s,H\}(C^{-1})^{sa'}\overset{(2)}{\phi}_{a'} \tag{8-1-24}$$

と書かれる．$\partial\theta_s/\partial t=0$ のとき H^{*} は$\{H^{*},\theta_s\}\approx 0$ を満たすことがただちにわかる．$\partial\theta_s/\partial t=0$，すなわち$\theta_s$ が t を陽に含まぬ場合は，第2類拘束は H^{*} に操り入れられ，H_T の中には，1次第1類拘束条件式のみが任意関数 v^{α} を係数として残る．第2類拘束条件式の位相空間の縮減に対する役割については，次節で述べる．

以上が，拘束条件式の整合性に関する Dirac のアルゴリズムの要点である．

例 8-1

$$L=q^1\dot{q}^2-q^2\dot{q}^1+q^1q^1+q^2q^2 \tag{8-1-25}$$

で記述される力学系を考える．これは1階微分方程式に従うスピン 1/2 の Dirac 粒子の場合に対応している．Dirac 粒子の場合，不用意に正準形式を用いると矛盾が生ずる．これを示すため，(8-1-25) の力学系を扱う．Lagrange 方程式は

$$\dot{q}^2+q^1=0,\quad \dot{q}^1-q^2=0 \tag{8-1-26}$$

拘束条件として

$$\phi_1\equiv p_1+q^2\approx 0\ ;\ \phi_2\equiv p_2-q^1\approx 0 \tag{8-1-27}$$

ここで，$\{p_1+q^2, p_2-q^1\}=2$ であるから，上の2つは第2類拘束条件式である．正準 Hamilton 関数は次式で与えられる．

$$\begin{aligned}H&=p_1\dot{q}^1+p_2\dot{q}^2-q^1\dot{q}^2+q^2\dot{q}^1-q^1q^1-q^2q^2\\&=(p_1+q^2)\dot{q}^1+(p_2-q^1)\dot{q}^2-q^1q^1-q^2q^2\\&=-q^1q^1-q^2q^2\end{aligned} \tag{8-1-28}$$

終わりの式を導く際に，(8-1-27)を用いた．全 Hamilton 関数 $H_T=H+v^1\phi_1+v^2\phi_2$ を求めるため (8-1-22) を用いると，v^1, v^2 は

$$v_1=q^2,\quad v^2=-q^1$$

よって

$$H_T=H^{*}=-q^1p_2+q^2p_1 \tag{8-1-29}$$

となる．注意すべきことは，H_T をとらずに (8-1-28) のHを用い，P.b. として

$$\{q^1,q^2\}=\{q^1,-p_1\}=-1 \tag{8-1-30}$$

をとると，

$$\dot{q}^1=\{q^1,H\}=2q^2$$

となり，(8-1-26)と矛盾する．$\phi_1 \approx 0$ によって $\{q^1, q^2\} = -1$ を用いるのが間違いである．これらの事情は次節で明らかになる．

§ 8-2 Dirac 括弧と縮減位相空間

前節で示したように，(8-1-24)で定義した H^* は，すべての第2類拘束条件 θ_s との P.b. は 0 であった．これを一般の力学量 f に対しても，すべての θ_s との P.b. が 0 になるような f^* を f からつくろう[2]．H^* との類推から

$$f^* = f + \alpha^s \theta_s \qquad (s = 1, \cdots, S) \tag{8-2-1}$$

とおき，

$$0 \approx \{f^*, \theta_s\} \approx \{f, \theta_s\} + \alpha^t \{\theta_t, \theta_s\} \tag{8-2-2}$$

から α_t を定めよう．$C_{st} = \{\theta_s, \theta_t\}$ とすると $\det(C_{st}) \neq 0$ であるから

$$\alpha^t = -\{f, \theta_s\}(C^{-1})^{st} \tag{8-2-3}$$

となる．求める f^* は

$$f^* = f - \{f, \theta_s\}(C^{-1})^{st}\theta_t \tag{8-2-4}$$

である．

他の力学量 g に対しても同様に g^* を導入し Poisson 括弧を計算すると

$$\{f^*, g^*\} \approx \{f, g^*\} \approx \{f^*, g\} \tag{8-2-5}$$

$$\approx \{f, g\} - \{f, \theta_s\}(C^{-1})^{st}\{\theta_t, g\} \tag{8-2-6}$$

となる．ここで

$$\{f, g\}^* = \{f, g\} - \{f, \theta_s\}(C^{-1})^{st}\{\theta_t, g\} \tag{8-2-7}$$

と新しい括弧式を導入する．これが **Dirac の括弧**と呼ばれるものである．

(8-2-7) はすべての q^i, p_i を独立変数のように扱い，力学量はもとのものをとり，P.b. を変更する立場である．(8-2-6) は

$$\{f^*, g^*\} \approx \{f, g\}^* \tag{8-2-8}$$

を意味する．力学量 f と θ_s との Dirac 括弧をとると

$$\{f, \theta_s\}^* = \{f, \theta_s\} - \{f, \theta_s\}(C^{-1})^{st}\{\theta_t, \theta_s\} = 0. \tag{8-2-9}$$

このことは P.b. の代わりに Dirac の括弧を基本にとるならば，θ_s を強い意味で 0 とおくことができて，理論から除きうることを示している．この点については，後に改めて述べる．

新しい Dirac 括弧がもとの P.b. と同じ役割を演じうるためには，P.b. と同じような性質を満たさなければならない．P.b. の性質として，第5章であげた (5-3-20 a)

〜(5-3-20 e) を満たすかどうか調べよう．(5-3-20 a)，すなわち，$\{f,g\}^*=-\{g,f\}^*$ は $\{f,g\}^*$ の定義式および $(C^{-1})^{st}$ の反対称性から明らかである．(5-3-20 b)，(5-3-20 d) は (5-3-20 e) に含まれると見ることもできるので後者が成立することを示そう．(8-2-5) を用いると*)

$$\{F,g\}^*=\{F,g^*\}=\frac{\partial F}{\partial f_a}\{f_a,g^*\}=\frac{\partial F}{\partial f_a}\{f_a,g\}^* \tag{8-2-10}$$

これは，(5-3-20 e) の性質に他ならない．Jacobi の恒等式((5-3-20 c) も同様にして，

$$\{\{f,g\}^*,h\}^*=\{\{f,g\}^*,h^*\}=\{\{f^*,g^*\},h^*\}$$

から，Dirac 括弧は f^*, g^*, h^* に対する通常の P.b. と見なしうるので (5-3-20 c) が適用できて，

$$\{\{f,g\}^*,h\}^*+\{\{g,h\}^*,f\}^*+\{\{h,f\}^*,g\}^*=0 \tag{8-2-11}$$

が満たされる．したがって，Dirac 括弧はもとの括弧 (P.b.) と同じ性質を満たすことが示された**)．さらに，Dirac 括弧は従来の P.b. で表されているので，P.b. がもっていた座標変換や正準変換に対する不変性を保っている．よって Dirac 括弧は座標系のとり方には，依存しない．

Dirac 括弧を用いると，(8-2-9)，(8-1-10)，(8-1-24) から，力学量 f に対する運動方程式は次のように書ける．

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\{f,H_T\}^*-\frac{\partial \theta_s}{\partial t}(C^{-1})^{st}\{f,\theta_t\} \tag{8-2-12}$$

ただし

$$H_T=H+\overset{(1)}{v}{}^a\overset{(1)}{\phi}_a.$$

通常の場合，θ_s は時間 t を陽に含まぬので (8-2-12) の右辺の最後の項はない．

Dirac 括弧の意味を位相空間の縮減という立場で考えてみよう．議論を簡単にするため，拘束条件式は t を陽に含まぬとして話を進める．$2N$ 個の自由度の位相空間 (q^i, p_j) が次の T 個の拘束条件式で制限されている場合を考える．

$$\varphi_t(q,p)\approx 0,\quad (t=1,\cdots,T). \tag{8-2-13}$$

---

*) Dirac 括弧を基本にすると θ_s は強い意味で 0 とおけるので，(8-2-10) および以下の式で≈の代わりに＝を用いた．

**) (8-2-11) の証明は弱等式に基づいてなされたが，厳密に成り立つことが証明される (Dirac の原論[1]を参照)．

位相空間の縮減に関して，次の２つの定理が有効である．１つはすでに第６章の定理6-6で与えられたもので，

（Ｉ） 包合系でない階数 r の関数群 G_r は，次式のような基底（$\phi_1, \cdots, \phi_N, \psi_1, \cdots, \psi_N$）をもつ階数 N の群の部分群である．

$$\{\phi_i, \phi_j\}=\{\psi_i, \psi_j\}=0\,;\ \{\psi_j, \phi_i\}=\delta_{ij} \qquad (i, j=1, \cdots, N). \tag{8-2-14}$$

もう１つの定理は§6-6から推察できる

（II） $T=2S+A$ 個の独立な式

$$G_t(q, p)=0 \qquad (t=1, \cdots, 2S+A) \tag{8-2-15}$$

で，$\{G_t, G_{t'}\}$ の階数が $2S$ のとき，この式は局所的に

$$\begin{aligned} &\phi_\lambda=0, \quad (\lambda=1, \cdots, S+A) \\ &\psi_\alpha=0, \quad (\alpha=1, \cdots, S) \end{aligned} \tag{8-2-16}$$

と等値で，$\phi_\lambda, \psi_\alpha$ の間には次の関係式が局所的に成立する．

$$\{\phi_\lambda, \phi_\mu\}=\{\psi_\alpha, \psi_\beta\}=0\ ;\ \{\psi_\alpha, \phi_\lambda\}=\delta_{\alpha\lambda}. \tag{8-2-17}$$

この(Ｉ)，(II)をまとめて次の定理が得られる*)．

定理 8-1

$2N$ 次元の位相空間（q^i, p_i）に（8-2-13）で与えられた T 個の条件式 $\varphi_t\approx 0$ が課せられ，$\{\varphi_t, \varphi_{t'}\}$ の階数が $2S$ のとき，次のように正準座標（Q^i, P_j）を局所的にとることができる．

$$\varphi_t\approx 0\ (t=1, \cdots, T) \iff P_a\approx 0, \quad (a=S+1, \cdots, S+A);$$
$$P_s\approx Q^s\approx 0, \quad (s=1, \cdots, S, \ \ T=2S+A).$$

これ以外の（$2N-T$）個の変数 $Q^{S+1}, \cdots, Q^N$；$P_{S+A+1}, \cdots, P_N$ は非拘束である．

$P_a\approx 0$ が A 個の第１類拘束条件式で，$Q^s\approx 0$；$P_s\approx 0$ が $2S$ 個の第２類拘束条件式である．（一般の場合の証明はしないが，特別な場合として例8-4で示す．）

この定理を用い Dirac 括弧の意味を考えよう．第１類拘束は存在しないとする，$A=0$．$Q^s\approx 0$，$P_s\approx 0$ をまとめて $\theta^s\approx 0$（$s=1, \cdots, 2S$）と書くと，上の定理8-1から正準座標として，$z^i=(x^a, \theta^s)$ ととれる．x^a は $2(N-S)$ 個の正準座標，$Q^{S+1}, \cdots, Q^N$；$P_{S+1}, \cdots, P_N$ で非拘束である．z^i は $\{z^i, z^j\}=-J^{ij}$，J^{ij} は（5-2-17）で与えられた $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 型の行列である．z^i 間の Dirac 括弧は，いま拘束条件は正準座

---

*） 益川-中島により，別な方法で得られている[３]．

標であるから

$$\{z^i, z^j\}^* = -J^{ij} + J^{is}(C^{-1})_{st}J^{tj} = -J^{ij} + J^{is}J_{st}J^{tj}$$
$$= -J^{ij} + \delta_s{}^i J^{sj}$$

よって，z^i が θ^s なら右辺は0，すなわち，$\{\theta^s, \theta^{s'}\}^* = 0$. 一方，$x^a$ 間の Dirac 括弧は

$$\{x^a, x^b\}^* = -J^{ab} \ ; \ a, b = 1, \cdots, 2(N-S)$$

となる．任意の力学量 f, g に対しては，上の結果から次式を得る．

$$\{f, g\}^* = -\sum_{a,b}^{2(N-S)} J^{ab} \frac{\partial f}{\partial x^a} \frac{\partial g}{\partial x^b}$$

$$= \sum_a^{N-S} \left(\frac{\partial f}{\partial q^a} \frac{\partial g}{\partial p_a} - \frac{\partial f}{\partial p_a} \frac{\partial g}{\partial q^a} \right) \tag{8-2-18}$$

このように Dirac 括弧は θ^s，すなわち P_s, Q^s を強い意味で0とおき，他に影響なしに第2類拘束条件式を除去しうることを示している．$2N$ 次元の位相空間 $\boldsymbol{P}$ が強い等式 $P_s = Q^s = 0$ により縮減された $2(N-S)$ 次元の縮減位相空間 $\boldsymbol{P}^*$ 上での P.b. によって $\boldsymbol{P}^*$ 上での力学を扱うことに対応している．したがって Dirac 括弧は Jacobi 恒等式を満たす．

上のことから，$\boldsymbol{P}^*$ 上の P.b. をもとの $\boldsymbol{P}$ 上で見ると Dirac 括弧になっていることが推察される．このことを実際に示すため，§5-4 で述べた Lagrange 括弧と P.b. との関係を用いる．一般化して，正準座標の代わりに z^i を一般座標で考える*)．力学量 f, g に対する Lagrange 括弧は，§5-4 で示したように

$$[f, g] \equiv \omega(X^f, X^g) = \omega\left(\frac{\partial}{\partial f}, \frac{\partial}{\partial g}\right) = \frac{\partial z^i}{\partial f} \omega_{ij} \frac{\partial z^j}{\partial g}$$

特に

$$[z^i, z^j] = \omega_{ij}. \tag{8-2-19}$$

ω_{ij} はシンプレクティク構造 $\omega = (1/2)\omega_{ij} dz^i \wedge dz^j$ と結ばれている．一方 P.b. は

$$\{f, g\} = -\omega(\boldsymbol{X}_f, \boldsymbol{X}_g) = -\frac{\partial f}{\partial z^k} \omega^{kl} \frac{\partial g}{\partial z^l}$$

で与えられ，特に

$$\{z^i, z^j\} = -\omega^{ij} \tag{8-2-20}$$

である．ω_{ij} と ω^{ij} は

$$\omega_{ik}\omega^{kj} = \delta_i{}^j \tag{8-2-21}$$

＊）　§5-4では一般座標は y^i と書いた．ここでは z^i を y^i の代わりに用いる．

で結ばれている．したがって

$$\sum_k [z^i, z^k]\{z^k, z^j\} = -\delta^{ij}$$

この式は次のように分けて書ける．以下では$\sum$の記号は略し，

$$-\delta^{ab} = [z^a, z^c]\{z^c, z^b\} + [z^a, z^s]\{z^s, z^b\} \tag{8-2-22}$$

$$0 = [z^a, z^c]\{z^c, z^s\} + [z^a, z^t]\{z^t, z^s\} \tag{8-2-23}$$

ここで $a, b, c = 1, \cdots, 2(N-S)$；$s, t = 2(N-S)+1, \cdots, 2N$ である．$\{z^t, z^s\} \equiv \{\theta^t, \theta^s\}$ なので $\{z^t, z^s\}$ を要素にもつ行列の逆行列が存在し，その要素を $(C^{-1})_{st}$ とすると，(8-2-23) から次式を得る．

$$[z^a, z^t] = -[z^a, z^c]\{z^c, \theta^s\}(C^{-1})_{st}.$$

これを (8-2-22) に代入し

$$-\delta^{ab} = [z^a, z^c](\{z^c, z^b\} - \{z^c, \theta^s\}(C^{-1})_{st}\{\theta^t, z^b\}) \tag{8-2-24}$$

右辺の（　）の中が Dirac 括弧 $\{z^c, z^b\}^*$ である．よって $\{z^c, z^b\}^*$ は Lagrange 括弧 $[z^a, z^c]$ と符号を除いて逆行列の関係にある．

$2N$ 次元位相空間 $\boldsymbol{P}$ の中の $2S$ 個の $\theta^s \approx 0$ で規定された $2(N-S)$ 次元の超曲面 $\boldsymbol{P}^*$ 上の局所座標は z^a であるので

$$[z^a, z^b] = \omega^*\left(\frac{\partial}{\partial z^a}, \frac{\partial}{\partial z^b}\right) = \omega_{ab}{}^* \tag{8-2-25}$$

によって $\boldsymbol{P}^*$ 上の2-形式 ω^* を導入しよう．$\omega_{ab}{}^*$ は z^a のみの関数で，z^s によらないとする．(8-2-24)からわかるように，$\omega_{ab}{}^*$ は逆をもち，ω^* は閉じている*)，$d\omega^* = 0$．ω^* は $\boldsymbol{P}^*$ 上では

$$\omega^* = \frac{1}{2}\omega_{ab}{}^* dz^a \wedge dz^b = \sum_{a=1}^{N-S} dQ^a \wedge dP_a \tag{8-2-26}$$

である．(8-2-4) で与えた f^* を参照してもとの $\boldsymbol{P}$ で表すと，

$$\tilde{\omega}^* \approx dq^{i*} \wedge dp_i{}^* \approx \omega - \frac{1}{2} d\theta^s \wedge (C^{-1})_{st} d\theta^t \tag{8-2-27}$$

と書けよう．ω は $\boldsymbol{P}$ 上のシンプレクティック構造である．$\boldsymbol{P}$ 上で定義された力学量 f，g と，それを $\boldsymbol{P}^*$ 上に制限した $\tilde{f} \equiv f(z^a, z^s=0)$，$\tilde{g}$ との間には，(8-2-27) の $\tilde{\omega}^*$ を用いると，($\tilde{f} \approx f^*$ に対応して)

$$\{\tilde{f}, \tilde{g}\} = \tilde{\omega}^*\{\boldsymbol{X}_f, \boldsymbol{X}_g\}$$

---

*) 写像 ϕ：$\boldsymbol{P} \to \boldsymbol{P}^*$ と外微分 d とは可換であるので，ω が閉じていれば ω^* も閉じている．

$$=\{f,g\}-\{f,\theta^s\}(C^{-1})_{st}\{\theta^t,g\} \qquad (8\text{-}2\text{-}28)$$

なる関係が成り立ち，Dirac 括弧 $\{f,g\}^*$ が得られる．

Lagrange 括弧から逆に Dirac 括弧を求めることは，例5-5の逆の過程にあたっている．z-変数として

$$\underbrace{z^1,z^2,\cdots,z^{2(N-S)}}_{2(N-S)\text{ 個の } P^* \text{ 上の座標 } z^a}\ ;\ \underbrace{z^{2(N-S)+1}=\theta^1,z^{2(N-S)+2}=\theta^2,\cdots,z^{2N}=\theta^{2S}}_{2S\text{ 個の拘束変数 } z^s}$$

の組を選び，$\omega=dq^i\wedge dp_i$ を $dz^i\wedge dz^j$ で書き直し

$$\omega=\frac{\partial q^i}{\partial z^a}\frac{\partial p_i}{\partial z^b}dz^a\wedge dz^b+\left(\frac{\partial q^i}{\partial z^a}\frac{\partial p_i}{\partial z^s}-\frac{\partial q^i}{\partial z^s}\frac{\partial p_i}{\partial z^a}\right)dz^a\wedge dz^s+\frac{\partial q^i}{\partial z^s}\frac{\partial p_i}{\partial z^t}dz^s\wedge dz^t \qquad (8\text{-}2\text{-}29)$$

とし，$dz^a\wedge dz^b$ の係数が Lagrange 括弧を与えるので，(8-2-24) によってその逆行列が Dirac 括弧となる．このように $2(N-S)$ 個の P^* 上の座標 $z^1,\cdots,z^{2(N-S)}$ として，Dirac 括弧をつくりたい変数を選んでおくと $\omega_{ab}{}^*$ の逆行列が求める Dirac 括弧になり，もとの定義式 (8-2-7) から直接計算するより楽である．(例 8-3 参照)

例 8-2

(8-1-25) で与えられた例8-1 を考える．そこで示したように，Hamilton 関数を変形する際や，Poisson 括弧を計算する場合に，第 2 類拘束条件を不用意に用いると矛盾が生じる．これを回避するためには Poisson 括弧の代わりに Dirac 括弧を用いなければならない．第 2 類拘束条件式として

$$\theta_1\equiv p_1+q^2\approx 0\ ;\ \theta_2\equiv p_2-q^1\approx 0$$

をとると，

$$C_{st}=\{\theta_s,\theta_t\}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}\ ;\ (C^{-1})^{st}=\begin{pmatrix}0 & -1/2\\ 1/2 & 0\end{pmatrix}$$

である．これを用い Dirac 括弧を求める．0 以外になるものを取り出すと

$$\{q^1,q^2\}^*=\{p_1,p_2\}^*=-\frac{1}{2}$$

$$\{q^i,p_j\}^*=\frac{1}{2}\delta^i{}_j \qquad (i,j=1,2)$$

この Dirac 括弧を用いる限り，$\theta_1=0$，$\theta_2=0$ を強い意味の等式として用いられるので H_T の代わりに

$$H=-q^1q^1-q^2q^2$$

としても

$$\dot{q}^1=\{q^1, H\}^* \Rightarrow \dot{q}^1-q^2=0$$

となり，Lagrange 方程式と矛盾しない．

例 8-3

上例を（8-2-29）を用い Lagrange 括弧より Dirac 括弧を求める．

$$z^1=q^1, \quad z^2=p_1, \quad z^3=\theta_1=p_1+q^2, \quad z^4=\theta_2=p_2-q^1$$

と選ぶと

$$-\omega=dp_1\wedge dq^1+d(\theta_2+q^1)\wedge d(\theta_1-p_1)=2dp_1\wedge dq^1+(d\theta_1, d\theta_2\text{ の残る項})$$

これから

$$\{q^1, p_1\}^*=\frac{1}{2}.$$

$\theta_1=\theta_2=0$ を用いて

$$\{q^2, p_2\}^*=\frac{1}{2}, \quad \{q^1, q^2\}^*=\{p_1, p_2\}^*=-\frac{1}{2}$$

となり例8-2と同じ結果になる．

例 8-4

定理8-1の特別な場合として，条件式 $\varphi_t\approx 0$ がすべて第 1 類拘束条件式である例を考える．この場合は，この定理の証明は次のように容易である．

$$\varphi_a=0 \qquad (a=1, \cdots, A) \tag{8-2-30}$$

は独立であり

$$\{\varphi_a, \varphi_b\}\equiv 0 \quad \mathrm{mod}(\varphi) \tag{8-2-31}$$

とする．(8-2-30) は，一般性を失うことなく p_a $(a=1, \cdots, A)$ について解けると仮定できるので，これらについて解いたものを

$$\Phi_a=p_a-f_a(q, p_s)\approx 0 \qquad (s=A+1, \cdots, N) \tag{8-2-32}$$

とおく．拘束条件式（8-2-30）と（8-2-32）とは同値であるので

$$\Phi_a=c_a{}^b\varphi_b \tag{8-2-33}$$

と書ける，ここで $c_a{}^b$ は q^i, p_i の関数である．したがって，$\Phi_a\approx 0$ も第 1 類拘束条件式となる．(8-2-30) あるいは (8-2-32) によって定まる多様体を N^* とする．

(8-2-32) から

$$\{\Phi_a, \Phi_b\}=\frac{\partial f}{\partial q^a}-\frac{\partial f}{\partial q^b}+\{f_a, f_b\}$$

となる．この式の右辺は p_a を含まないで (q^i, p_s) のみで表されている．一方，Φ_a は広義の包合系をなすので

$$\{\Phi_a, \Phi_b\}|_{N^*}=0 \tag{8-2-34}$$

である．N^* 上では座標変数を (q^i, p_s) にとることができるので，p_a によらない (8-2-34) となるためには，もとの $\boldsymbol{P}$ 上で

$$\{\Phi_a, \Phi_b\}=0 \tag{8-2-35}$$

が結論される．よって，§6-6の議論から，

$$\Phi_a=P_a$$

なる正準変換が存在し，

$$\varphi_a=0 \Longleftrightarrow P_a=0 \tag{8-2-36}$$

が示される．

§8-3　第1類拘束条件式とゲージ変換との関係

第2類拘束条件式は，$2N$ 次元の位相空間を $2S$ 個の第2類拘束によって $2(N-S)$ 次元位相空間に縮減することによって理論から消去できた．あるいは，Dirac 括弧をとることにより，第2類拘束条件式は強い等式に変換可能であるともいえよう．残ったのは，全 Hamilton 関数 (8-1-23) の中に任意関数の係数をもって入っている第1類拘束条件式 $\overset{(1)}{\phi}_\alpha$ である（以下，$\overset{(1)}{\phi}_\alpha$ を ϕ_α と書く）；

$$H_T=H+v^\alpha\phi_\alpha, \quad (\alpha=1, \cdots, A). \tag{8-3-1}$$

系の物理状態は q^i, p_j で定められる．v^α の任意性から q^i, p_j の運動は一意的には定まらない．逆に状態は q^i, p_j を一意的に規定しない．同じ状態に対応する q，p の組はいろいろある．この自由度をゲージ自由度という．この自由度を定めるのが任意関数 v^α（すなわち ϕ_α）の数である．

力学量 g は $t=0$ から微小時間 t の後には

$$g(t)=g_0+\dot{g}_0t+\frac{1}{2}\ddot{g}_0t^2+\cdots \tag{8-3-2}$$

となる．$\dot{g}_0, \ddot{g}_0$ 等は $\left.\frac{d}{dt}g\right|_{t=0}$，$\left.\frac{d^2}{dt^2}g\right|_{t=0}$ 等を意味する．(8-3-1) の Hamilton 関数に従うときは

$$g_v(t)=g_0+t(\{g_0, H\}+v^\alpha\{g_0, \phi_\alpha\})+\frac{t^2}{2}(\{\{g_0, H\}, H\}$$
$$+\{\{g_0, H\}, v^\alpha\phi_\alpha\}+\{\{g_0, v^\alpha\phi_\alpha\}, H_T\})+O(t^3) \qquad (8\text{-}3\text{-}3)$$

ここで v の代わりに $\bar{v}$ をとった $g_{\bar{v}}(t)$ との差を求めると，Jacobi 恒等式を用いて，

$$g_v(t)-g_{\bar{v}}(t)=t(v^\alpha-\bar{v}^\alpha)\{g_0, \phi_\alpha\}+\frac{1}{2}t^2\Big(2\{\{g_0, H\}, (v^\alpha-\bar{v}^\alpha)\phi_\alpha\}$$
$$+\{g_0, \frac{d}{dt}(v^\alpha\phi_\alpha-\bar{v}^\alpha\phi_\alpha)\}+\{\{g_0, v^\alpha\phi_\alpha\}, v^\beta\phi_\beta\}$$
$$-\{\{g_0, \bar{v}^\alpha\phi_\alpha\}, \bar{v}^\beta\phi_\beta\}\Big)+O(t^3) \qquad (8\text{-}3\text{-}4)$$

上式の左辺の差は物理的状態を変えない．$\dfrac{d}{dt}\phi_\alpha$ から 2 次拘束条件が現れることを考慮すると，1 次第 1 類，2 次第 1 類拘束条件は，物理的状態を変えない q^i, p_i の変化 $\delta q^i, \delta p_i$ を引き起こす無限小変換の生成演算子の役を果たしていることがわかる．

運動方程式と初期値からその時間的発展が一意的に定まり，任意関数には依存しない力学量が物理量と呼ばれるのにふさわしいだろう．この意味で，このような量はオブザーバブル（観測可能量）と呼ばれる．オブザーバブル $\mathcal{O}$ の条件は 1 次第 1 類拘束条件 $\overset{(1)}{\phi}_\alpha$ との間には $\{\mathcal{O}, \overset{(1)}{\phi}_\alpha\}=0$ の関係が少なくとも満たされる必要がある．この場合には，$\{\mathcal{O}, H_T\}=\{\mathcal{O}, H\}$ で $\mathcal{O}$ に対する正準運動方程式に任意関数 v^α は現れない．

オブザーバブルを位相空間の縮減という立場で考えよう．定理8-1により，$2S$ 個の第 2 類拘束条件式と A 個の第 1 類拘束条件式があるとき，位相空間は局所的に次のような座標で書かれる：

$$Q^s\approx P_s\approx 0, \quad (s=1, \cdots, S)\ ;\ P_a\approx 0, \quad (a=S+1, \cdots, S+A) \qquad (8\text{-}3\text{-}5)$$

非拘束の $(N-S)$ 個の Q^β $(\beta=S+1, \cdots, N)$，$(N-S-A)$ 個の P_α $(\alpha=S+A+1, \cdots, N)$ があり，これらは次の P.b. を満たす．

$$\{Q^\beta, P_a\}=\delta_a{}^\beta\ ;\ \{Q^\beta, P_\alpha\}=\delta_\alpha{}^\beta \qquad (8\text{-}3\text{-}6)$$

上式以外の，Q^β と他の正準変数との P.b. は 0 である．(8-3-5) の P_a が 1 次第 1 類拘束であるので，オブザーバブル $\mathcal{O}$ は $\{\mathcal{O}, P_a\}=0$ を満たさねばならない．したがって $\mathcal{O}$ は (8-3-6) の第 1 式から座標 Q^a $(a=S+1, \cdots, S+A)$ を含まない．物理量は $2(N-S-A)$ 次元の縮減位相空間の座標 Q^α, P_α $(\alpha=S+A+1, \cdots, N)$ のみで表されるべきである．これから拘束条件式が位相空間縮減に果たす役割は，$2S$ 個の第

2類拘束条件式は2個が組になり1自由度を，A個の第1類拘束条件式はそれぞれ1個ずつ自由度を縮減させる．実際問題では，このような座標系を選ぶことは技術的に難しい．

ゲージ変換の生成演算子として2次第1類拘束条件も関係することを上で示した．このことを根拠にして，全 Hamiltonian の中にある $v^a \overset{(1)}{\phi}_a$ を拡張して，次の関係式を満たす φ_g を用いて $v^g \varphi_g$ ととりうるということも考えられる：

$$\{\varphi_g, \varphi_{g'}\} = \gamma_{gg'}{}^{g''}(q, p)\varphi_{g''} \tag{8-3-7 a}$$

$$\{\varphi_g, H\} = h_g{}^{g''}(q, p)\varphi_{g''} \tag{8-3-7 b}$$

ここで g, g', g'' は1次第1類拘束を含む最小の集合の要素の番号を示し，γ, h には φ_g は含まれぬとする．H_T を拡張して

$$H_G = H + v^g \varphi_g \tag{8-3-8}$$

とする際，H_G に入る φ_g を定める式(8-3-7)を Dirac のテストと呼んでいる［4］．Dirac は（8-3-7）で選ばれた φ_g の全体を G とすると

$$G = \text{FC（＝すべての独立な第1類拘束の集合）} \tag{8-3-9}$$

を満たさぬ例を知らないと述べた．これも Dirac のテストと呼ばれる．このことから Dirac は，最も一般的な Hamiltonian として次のものを予測した：

$$H_E = H + v^e \varphi_e \tag{8-3-10}$$

ここで φ_e はすべての1次，2次第1類拘束条件である．これが Dirac の予測と呼ばれる［5］．

以下に示す例でわかるように，Dirac の予測は必ずしも正しくない．拘束系の理論で問題になるのは，Hamiltonian をいかにとるかということである．それを明らかにするためには，Lagrange 形式と正準形式との整合性の観点から，この問題を扱うべきであろう．両形式を同時に扱うには，微分形式による方法が最も適しているであろう．微分形式で解析力学を論ずるという本書の目的のひとつに，この問題の解決がある．

例 8-5

Calway が提出した力学系を考えよう［4］．

$$L = \dot{q}^1 \dot{q}^3 + \frac{1}{2} q^2 (q^3)^2 \tag{8-3-11}$$

これから導かれる Lagrange 方程式は

$$\ddot{q}^3=0\;;\;\frac{1}{2}(q^3)^2=0\;;\;\ddot{q}^1-q^2q^3=0 \tag{8-3-12}$$

1次拘束条件式および全 Hamiltonian は

$$\begin{aligned} &p_2\approx 0\;;\\ &H_T=p_1p_3-\frac{1}{2}q^2(q^3)^2+vp_2 \end{aligned} \tag{8-3-13}$$

$\dot{p}_2\approx 0$ から $q^3\approx 0$，$\dot{q}^3\approx 0$ から $p_1\approx 0$．$q^3\approx 0$，$p_1\approx 0$ が2次第1類拘束条件式である．FC $\{p_2\,;\,q^3\,;\,p_1\}$ で $g=p_2$ のとき $\{g, H\}=(1/2)(q^3)^2$．これから $q^3\approx 0$ は弱等式でも $\{g, H\}=0$ となり G は p_2 のみで (8-3-9) の Dirac テスト $G=\mathrm{FC}$ を満たさぬ．

さらに Dirac の予測により

$$H_E=up_1+vp_2+\omega q^3 \tag{8-3-14}$$

ととってみる．u, v, ω は任意関数でHの中の p_1p_3 は up_1 の中に繰り入れた．H_E から得られる正準方程式は

$$\dot{q}^1=u,\quad \dot{q}^2=v,\quad \dot{q}^3=0,\quad \dot{p}_1=0,\quad \dot{p}_2=0,\quad \dot{p}_3=\omega. \tag{8-3-15}$$

$p_3=\dot{q}^1$ を上式の最後の式に入れると

$$\ddot{q}^1=\omega$$

となり，(8-3-12) の最後の式と矛盾する．Dirac のテストと予測が必ずしも成立しない例である．

§ 8-4　Poincaré-Cartan 形式による速度位相空間内での定式化

Hessian 行列 A_{ij} の階数が $(N-r)$ $(0<r<N)$ の特異 Lagrange 関数の場合，微分形式の理論によって定式化を試みよう [6]．まず速度位相空間 TQ で考えよう．

2-形式

$$\omega=dq^i\wedge dp_i(q,\xi),\quad i=1,\cdots,N$$

は TQ では退化し，速度位相空間 TQ はプレシンプレクティク構造をもつ．基本1-形式

$$\begin{aligned} &\Omega=p_i(q,\xi,t)dq^i-E(q,\xi,t)dt\\ &E(q,\xi,t)=p_i\xi^i-L \end{aligned} \tag{8-4-1}$$

から，運動方程式を導こう．ここで，Ω の外微分をとると，

$$d\Omega=-\rho^i\wedge\theta_i \tag{8-4-2 a}$$

$$\rho^i=dq^i-\xi^i dt \tag{8-4-2 b}$$

$$\theta_i = A_{ij}d\xi^j + \frac{\partial p_i}{\partial q^j}dq^j + \left(\frac{\partial p_i}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial q^i}\right)dt, \tag{8-4-2 c}$$

$$d\Omega(\partial/\partial\xi^i) = 0 \rightarrow \rho_i \equiv A_{ij}(dq^j - \xi^j dt) = A_{ij}\rho^j = 0 \tag{8-4-3 a}$$

$$d\Omega(\partial/\partial q^i) = 0 \rightarrow \theta_i \equiv A_{ij}d\xi^j + R_{ij}\rho^j - S_i dt = 0 \tag{8-4-3 b}$$

ただし

$$R_{ij} \equiv \frac{\partial p_i}{\partial q^j} - \frac{\partial p_j}{\partial q^i} \ ; \ S_i \equiv -\frac{\partial p_i}{\partial q^j}\xi^j - \frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial q^i} \tag{8-4-4}$$

(A_{ij}) は階数が $(N-r)$ であるから，次式を満たす $\tau_\alpha{}^j$ $(\alpha=1,\cdots,r)$ が存在する．

$$A_{ij}\tau_\alpha{}^j \equiv 0. \tag{8-4-5}$$

(8-4-3- a) から

$$dq^i - \xi^i dt - \tau_\alpha{}^i v^\alpha = 0 \ ; \ v^\alpha：任意の1\text{-}形式$$

われわれは以下 $\dot{q}^i = \xi^i$ を保つようにして議論を進める．よって $v^\alpha = 0$ とおく．

$$\rho^i = dq^i - \xi^i dt = 0 \tag{8-4-6 a}$$

(8-4-3 b) に入れると

$$A_{ij}d\xi^j - S_i dt = 0$$

このN個の方程式はすべてが独立でない．この方程式に $\tau_\alpha{}^i$ を掛けたものの整合性から

$$\phi_\alpha \equiv \tau_\alpha{}^i S_i = 0, \quad \alpha = 1, \cdots, r \tag{8-4-7}$$

が要請される．$\tau^i{}_\alpha$ の完全性から

$$S_i \approx A_{ij}\eta^j \tag{8-4-8}$$

を弱い意味で満たす η^i が存在する．したがって

$$A_{ij}(d\xi^j - \eta^j dt) \approx 0$$

これから

$$\theta^i \equiv d\xi^i - \eta^i dt - u^\alpha \tau^i{}_\alpha dt \approx 0 \qquad (\theta_i \approx A_{ij}\theta^j) \tag{8-4-6 b}$$

ここで u^α は任意関数である．運動方程式として (8-4-6 a)，(8-4-6 b) を得た．

運動方程式の生成系Xを求めよう．正則な場合に行った§3-1の(3-1-8)，(3-1-9)と同様に

$$d\Omega(X) = 0 \tag{8-4-9}$$

からXを定めよう．Xとして

$$X = a^i\frac{\partial}{\partial\xi^i} + b^i\frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{\partial}{\partial t} \tag{8-4-10}$$

とおき，(8-4-9) に代入すると次式を得る．

$$A_{ij}(b^j-\xi^j)=0,$$
$$A_{ij}a^j+R_{ij}(b^j-\xi^j)-S_i=0, \qquad (8\text{-}4\text{-}11)$$
$$A_{ij}\xi^j a^i-(S_i+R_{ij}\xi^j)b^i=0$$

第１式より

$$b^i=\xi^i+v^\alpha\tau_\alpha{}^i \ ; \ v^\alpha：任意関数$$

(8-4-6 a) で v^α を落としたと同じ理由で $\rho^i(X)=(dq^i-\xi^i dt)(X)=0$ を要請すると $v^\alpha=0$ でなければならない．(8-4-7) が導かれたと同様に，(8-4-11) の第２式と $b^i=\xi^i$ から

$$A_{ij}a^j-S_i=0 \ \rightarrow \ \phi_\alpha\equiv\tau^i{}_\alpha S_i\approx 0.$$

よって $S_i\approx A_{ij}\eta^j$ を満たす η^j が存在し，

$$a^i=\eta^i \quad \mathrm{mod}(\tau_\alpha{}^i)$$

となる．これから

$$X=\eta^i\frac{\partial}{\partial\xi^i}+\xi^i\frac{\partial}{\partial q^i}+\frac{\partial}{\partial t}+u^\alpha\tau_\alpha{}^i\frac{\partial}{\partial\xi^i} \qquad (8\text{-}4\text{-}12)$$

を得る．u^α は任意関数である．u^α の任意性から，運動方程式に直交する生成系として

$$X_t\equiv\eta^i\frac{\partial}{\partial\xi^i}+\xi^i\frac{\partial}{\partial q^i}+\frac{\partial}{\partial t}, \qquad (8\text{-}4\text{-}13\,\mathrm{a})$$

$$Z_\alpha\equiv-\tau^i{}_\alpha\frac{\partial}{\partial\xi^i} \qquad (\alpha=1,\cdots,r) \qquad (8\text{-}4\text{-}13\,\mathrm{b})$$

が求まる．実際に，Z_α は (8-4-3) の ρ_i, θ_i に対し

$$\rho_i(Z_\alpha)=0, \quad \theta_i(Z_\alpha)\approx 0$$

を満たすことは容易にわかる．

拘束条件を伴う運動方程式 (8-4-3) が積分可能なためには，その生成系 (8-4-13) が完全系でなければならない．しかし，次の理由から完全系ではない．$[Z_\alpha, Z_\beta]=0$ は満たされるが，

$$[X_t, Z_\alpha]=\tau^i{}_\alpha\frac{\partial}{\partial q^i}+(-Z_\alpha\eta^i-X_t\tau^i{}_\alpha)\frac{\partial}{\partial\xi^i}\equiv Y_\alpha{}^1 \qquad (8\text{-}4\text{-}14)$$

は X_t, Z_α と独立である．さらに，$Y_\alpha{}^1$ は一般には θ_i と直交しない．

$$\rho_i(Y_\alpha{}^1)=0, \qquad (8\text{-}4\text{-}15)$$

$$\theta_i(Y_\alpha{}^1)=A_{ij}(-Z_\alpha\eta^j-X_t\tau_\alpha{}^j)+R_{ij}\tau_\alpha{}^j\not\approx 0 \qquad (8\text{-}4\text{-}15')$$

$\theta_i(Y_\alpha{}^1)\approx 0$ になるためには，すべての $\tau_\beta{}^i$ に対して

$$\tau_\beta{}^i R_{ij}\tau_\alpha{}^j\approx 0 \qquad (8\text{-}4\text{-}16)$$

でなければならないが，一般にはこの式は成立しない*)．

このような場合に運動方程式が積分可能のためには，(8-4-15′) が弱等式を満たすように，拘束条件を付け加えて生成系 $X_t, Z_\alpha, Y_\alpha{}^1$ が完全系をなすように特性系をつくらねばならない．しかし，それだけでは生成系が完全系をつくるとは限らない．なぜならば，第2類拘束条件がある場合

$$[X_t,\ Y_\alpha{}^1],\quad [Y_\alpha{}^1,\ Y_\beta{}^1]$$

が一般には次々と新たなベクトル場を生ずるからである．そこで，この困難を避けるため，Z_α と $Y_\alpha{}^1$ を X_t に加えて1つのベクトル場として扱うことにすると，追加すべき拘束条件の数を有限に，しかも最少におさえることができよう．したがって，運動の生成系として

$$\begin{aligned}X_T &\equiv X_t+v^\alpha Y_\alpha{}^1+u^\alpha Z_\alpha\\ &=\eta^i\frac{\partial}{\partial\xi^i}+\xi^i\frac{\partial}{\partial q^i}+v^\alpha Y_\alpha{}^1+u^\alpha Z_\alpha+\frac{\partial}{\partial t}\end{aligned} \qquad (8\text{-}4\text{-}17)$$

ととる．ここで v^α は未定関数である．この X_T が ρ_i, θ_i と直交し，かつ拘束条件と整合的になるように v^α, u^α を決定すればよい．拘束条件 (8-4-7) は任意の時刻において成り立たねばならぬので，運動方程式と整合的であるためには，ϕ_α は定常条件

$$X_T\phi_\alpha=d\phi_\alpha(X_T)\approx 0 \qquad (8\text{-}4\text{-}18)$$

を満たさねばならない．(8-4-18) において Z_α の項は消えるが**)，$Y_\beta{}^1\phi_\alpha\not\approx 0$ のとき v^β の内のあるものが残るときがある．このときには，それらの v^β をうまく選んで，(8-4-18) が満たされるようにできる．すなわち，この場合には (8-4-18) が v^β を定める式である．しかし，$Y_\beta{}^1\phi_\alpha\approx 0$ のときは v^β 項は消えるので (8-4-18) が満たされない場合が起こる．このときには，これが新たな拘束条件をもたらす．

そこで，この拘束条件を $\phi_\alpha\equiv\phi_\alpha{}^2$ とおき，$\phi_\alpha{}^2$ から出発して，次々に新拘束条件が出るとき，

---

*）$\tau_\alpha{}^i$ は次節の (8-5-4 a) によって ϕ_α と関係づけられるが，$\{\phi_\alpha, \phi_\beta\}=0 \bmod(\phi_\gamma)$ のとき (8-4-16) が成り立つ．

**）§8-5 で示すように，Z_α は位相空間に変換すると 0 となる．したがって $\phi_\alpha(q,\xi)$ が位相空間に変換され $_*\phi_\alpha(q,p)$ と表すことができる場合には $Z_\beta\phi_\alpha=0$ となる．実際に $_*\phi(q,p)$ は存在する．

$$\left.\begin{aligned}\phi_\alpha{}^{\mu+1} &\equiv X_T\phi_\alpha{}^\mu \qquad (\mu=2,\cdots,m_\alpha)\\ \phi_\alpha{}^{m_\alpha+1} &\equiv X_T\phi_\alpha{}^{m_\alpha}=C_{\alpha\mu}{}^\beta\phi_\beta{}^\mu\end{aligned}\right\} \tag{8-4-19}$$

と定義する*)．第 2 式は $\phi_\alpha{}^{m_\alpha+1}$ が $\phi_\alpha{}^\mu$ の 1 次結合で表され，拘束条件は $\phi_\alpha{}^{m_\alpha}$ で終わることを示している．ϕ^μ の定常条件のためには，(8-4-19) の第 1 式は mod ($\phi^1,\cdots,\phi^\mu$) のもとで定義してもよい．

以上で，整合性の条件，言い換えると運動方程式の積分可能条件は

$$\left.\begin{aligned}&\theta_i(X_T)\approx 0,\\ &X_T\phi_\alpha{}^\mu\approx 0 \qquad (\mu=2,\cdots,m_\alpha)\end{aligned}\right\} \tag{8-4-20}$$

となる．$\rho_i(X_T)\approx 0$ は自動的に満たされ，条件を与えない．運動の生成系を (8-4-17) のように 1 つの X_T にまとめるのなら，最初から $X_T=X_t+u^aZ_a$ とすれば $Y_a{}^1$ を導入せずにすみそうに見える．しかし，前ページの脚注で示したように，$Z_\beta\phi_\alpha{}^\mu=0$ なので，Z_a 項は定常条件には効かず，必要以上の多くの拘束条件が現れてしまう．これを避けるには $Y_a{}^1$ が必要である．(8-4-20) は v^a の中のある v^s を決定する式になる．この式に残らない v^a は任意のまま残る．結局，X_T は次のように書ける．

$$\begin{aligned}X_T&=\eta^i\frac{\partial}{\partial\xi^i}+\xi^i\frac{\partial}{\partial q^i}+v^sY_s{}^1+\frac{\partial}{\partial t}+u^aZ_a+v^aY_a{}^1\\ &\equiv X_t+u^aZ_a+v^aY_a{}^1+v^sY_s{}^1\ ;\ u^a, v^a \text{ は任意.}\end{aligned} \tag{8-4-21}$$

§8-1 の Dirac の正準形式理論と比べてみると，$Y_a{}^1$ と $Y_s{}^1$ は 1 次拘束条件の第 1 類と第 2 類拘束のベクトル場に対応している．$Y_a{}^1$ はすべての $\phi_\alpha{}^\mu$ に対し

$$Y_a{}^1\phi_\beta{}^\mu\approx 0 \tag{8-4-22}$$

で，(8-4-19) が v^a に対する条件にならない場合で，$Y_a{}^1$ によって引き起こされる変換に対し $\phi_\beta{}^\mu$ は不変である．§8-3 からの対応で $Y_a{}^1$ はゲージ変換の生成演算子と結び付けられる．

ここで拘束条件 $\phi_\alpha{}^\mu\approx 0$ の結果，行列 A_{ij} の階数が $\bar{r}$ だけ下がる場合，すなわち (A_{ij}) の階数が $(N-r-\bar{r})$ に弱い意味でなったとする．拘束条件のもとで $\tau_a{}^i$ は A_{ij} の固有値が 0 の固有ベクトルの完全系をつくらなくなる．したがって (8-4-7) から (8-4-8) は得られない．よって，

$$A_{ij}\bar{\tau}_\beta{}^j\approx 0 \qquad (\beta=1,\cdots,\bar{r}) \tag{8-4-23}$$

なる固有ベクトルを付け加えねばならない．これに対応して $\bar{r}$ 個の

---

*) $\phi_\alpha{}^2$ は Dirac の正準形式理論における 2 次拘束条件であることを示すためにこう表した．

$$\bar{Z}_\beta = -\bar{\tau}_\beta{}^i \frac{\partial}{\partial \xi^i} \; ; \; \bar{Y}_\beta = [X_t, \bar{Z}_\beta] \tag{8-4-24}$$

を X_T に加えて

$$\bar{X}_T = X_T + \bar{u}^\beta \bar{Z}_\beta + \bar{v}^\beta \bar{Y}_\beta \tag{8-4-25}$$

とし，$\bar{X}_T$ について同じことを繰り返す．

以上が速度位相空間における，微分形式による拘束系に対する力学の定式化である．次の節で位相空間における定式化との関係を調べる．

§ 8-5 位相空間における定式化との関係

速度位相空間と位相空間における定式化の間の関係を見るため，1次拘束条件式の両空間における対応についての考察から始めよう．位相空間では拘束条件として

$$\phi_\alpha{}^1(q, p) \approx 0 \tag{8-5-1}$$

がある．これは A_{ij} が非正則のため $A_{ij}\tau_\alpha{}^j = 0$ を満たす r 個の固有ベクトルの存在に対応していた．速度位相空間 TQ では

$$\phi_\alpha{}^1(q, p(q, \xi)) \equiv 0 \tag{8-5-2}$$

で 恒等式である．したがって q^i, ξ^j で微分して

$$\frac{\partial \phi_\alpha{}^1}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \phi_\alpha{}^1}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial \xi^i} = A_{ij} \frac{\partial \phi_\alpha{}^1}{\partial p_j} = 0 \tag{8-5-3 a}$$

$$\frac{\partial \phi_\alpha{}^1}{\partial q^i} = \frac{\partial \phi_\alpha{}^1}{{}_*\partial q^i} + \frac{\partial \phi_\alpha{}^1}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial q^i} = 0 \tag{8-5-3 b}$$

ここで $\partial/{}_*\partial q^i$ は位相空間での p_i を固定した微分を意味する．(8-5-3 a) より

$$\tau_\alpha{}^i(q, p) = \frac{\partial \phi_\alpha{}^1}{\partial p_i} \tag{8-5-4 a}$$

したがって (8-5-3 b) は

$$\frac{\partial \phi_\alpha{}^1}{{}_*\partial q^i} + \tau_\alpha{}^j \frac{\partial p_j}{\partial q^i} = 0 \tag{8-5-4 b}$$

と書ける．(8-4-23) のような $\bar{\tau}_\beta{}^i$ が余分にあるときは

$$\bar{\phi}_\beta(q, p) \approx 0 \; ; \; \beta = 1, \cdots, \bar{r} \; ; \; \bar{\phi}_\beta(q, p(q, \xi)) \approx 0 \tag{8-5-5}$$

は等式ではなく弱等式なので，q^i, ξ^i で微分しても求める関係式は導かれない．このときは，

$$\bar{\phi}_\beta(q, p(q, \xi)) \doteq G_\beta{}^\sigma(q, \xi)\chi_\sigma(q, \xi) + (\chi \text{ の2次以上})$$

と書かれることに注目する．ここで χ_σ は（8-4-19）の $\phi_\alpha{}^\mu$ である．この関係式から，拘束条件には1次結合の任意性があることを利用して

$$\tilde{\phi}_\beta(q, p(q, \xi)) = \bar{\phi}_\beta(q, p(q, \xi)) - G_\beta{}^\sigma \chi_\sigma(q, p(q, \xi)) \tag{8-5-6}$$

を拘束条件ととれば弱等式でなく通常の等式なので，$\tilde{\phi}_\beta$ を用いて $\bar{\tau}_\beta{}^i \approx \partial\tilde{\phi}_\beta/\partial p_i$ と弱等式で定義される．（8-5-4 b）に対応したものも $\tilde{\phi}_\beta$ を用いてつくれる．

$TQ\times R$ における X_T を $T^*Q\times R$ における ${}_*X_T$ へ写像しよう．ベクトル場に対しては $T(TQ)\times R$ から $T(T^*Q)\times R$ への写像は常に存在する．この逆は拘束条件がある場合，必ずしも成り立たない．しかし，速度位相空間のXから位相空間の ${}_*X$ は常に可能である．（3-2-14）で与えたように

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q^i} &\to \frac{\partial}{{}_*\partial q^i} + \frac{\partial p_j}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_j} \\ \frac{\partial}{\partial \xi^i} &\to \frac{\partial p_j}{\partial \xi^i}\frac{\partial}{\partial p_j} = A_{ij}\frac{\partial}{\partial p_j} \\ \frac{\partial}{\partial t} &\to \frac{\partial p_i}{\partial t}\frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{\partial}{{}_*\partial t} \end{aligned} \tag{8-5-7}$$

これらを $X_t = \eta^i\dfrac{\partial}{\partial \xi^i} + \xi^i\dfrac{\partial}{\partial q^i} + \dfrac{\partial}{\partial t}$ に入れると

$$X_t \to A_{ij}\eta^i\frac{\partial}{\partial p_j} + \xi^i\left(\frac{\partial}{{}_*\partial q^i} + \frac{\partial p_j}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_j}\right) + \frac{\partial p_i}{\partial t}\frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{\partial}{{}_*\partial t}$$

§8-4で示したように，$A_{ij}\eta^j \approx S_i\left(= -\dfrac{\partial p_i}{\partial q^j}\xi^j - \dfrac{\partial p_i}{\partial t} + \dfrac{\partial L}{\partial q^i}\right)$ であるから

$$X_t \to \frac{\partial L}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_j} + \xi^i\frac{\partial}{{}_*\partial q^i} + \frac{\partial}{{}_*\partial t} \tag{8-5-8}$$

拘束条件は弱等式で要請されるので，すべての q^i, p_i は独立であるかのように扱って，通常の Hamilton 関数の定義式

$$H = \xi^i p_i - L$$

から

$$dH = \xi^i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q^i}dq^i - \frac{\partial L}{\partial t}dt.$$

これより

$$\xi^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\ ;\ \frac{\partial L}{\partial q^i} = -\frac{\partial H}{{}_*\partial q^i}\ ;\ \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} \tag{8-5-9}$$

これを（8-5-8）に入れると

$$X_t \rightarrow {}_*X_t=\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{{}_*\partial q^i}-\frac{\partial H}{{}_*\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}+\frac{\partial}{{}_*\partial t}$$

$$=\boldsymbol{X}_H+\frac{\partial}{{}_*\partial t}, \tag{8-5-10}$$

全 X_T の中の X_t の写像が求まったので，$u^\alpha Z_\alpha$, $v^\alpha Y_\alpha{}^1$ の写像を求める．

$$Z_\alpha \rightarrow {}_*Z_\alpha=-\tau_\alpha{}^i A_{ij}\frac{\partial}{\partial p_j}=0 \tag{8-5-11}$$

(8-4-14) の $Y_\alpha{}^1$，すなわち $Y_\alpha{}^1=\tau_\alpha{}^i\dfrac{\partial}{\partial q^i}+(-Z_\alpha\eta^i-X_t\tau_\alpha{}^i)\dfrac{\partial}{\partial\xi^i}$ の写像は

$$Y_\alpha{}^1 \rightarrow \tau_\alpha{}^i\left(\frac{\partial}{{}_*\partial q^i}+\frac{\partial p_j}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_j}\right)+A_{ik}\left(\tau_\alpha{}^j\frac{\partial\eta^i}{\partial\xi^j}-X_t\tau_\alpha{}^i\right)\frac{\partial}{\partial p_k}$$

ここで $\partial/\partial p_k$ の係数を求めよう．

$$\begin{aligned}
\partial/\partial p_k \text{ の係数} &= \tau_\alpha{}^i\frac{\partial p_k}{\partial q^i}+A_{ik}\left(\tau_\alpha{}^j\frac{\partial\eta^i}{\partial\xi^j}-X_t\tau_\alpha{}^i\right)\\
&=\tau_\alpha{}^j\left\{\frac{\partial p_k}{\partial q^j}+\frac{\partial(A_{ik}\eta^i)}{\partial\xi^j}-\frac{\partial A_{ik}}{\partial\xi^j}\eta^i+X_tA_{jk}\right\}\\
&\approx\tau_\alpha{}^j\left\{\frac{\partial p_k}{\partial q^j}+\frac{\partial S_k}{\partial\xi^j}-\frac{\partial A_{ik}}{\partial\xi^j}\eta^i+\eta^i\frac{\partial A_{jk}}{\partial\xi^i}+\xi^i\frac{\partial A_{jk}}{\partial q^i}\right\}\\
&=\tau_\alpha{}^j\left\{\frac{\partial p_k}{\partial q^j}+\frac{\partial}{\partial\xi^j}\left(\frac{\partial L}{\partial q^k}-\frac{\partial p_k}{\partial q^i}\xi^i\right)+\xi^i\frac{\partial A_{jk}}{\partial q^i}\right\}\\
&=\tau_\alpha{}^j\left\{\frac{\partial p_k}{\partial q^j}+\frac{\partial p_j}{\partial q^k}-\frac{\partial p_k}{\partial q^j}\right\}=\tau_\alpha{}^j\frac{\partial p_j}{\partial q^k}=-\frac{\partial\phi_\alpha{}^1}{{}_*\partial q^k}
\end{aligned}$$

上で (8-4-8) および $\partial A_{ik}/\partial\xi^j=\partial A_{jk}/\partial\xi^i$ を用いた*)．したがって，$\phi_\alpha{}^2=\tau_\alpha{}^iS_i\approx0$ のもとで次の対応が成り立つ**)．

$$Y_\alpha{}^1 \rightarrow \frac{\partial\phi_\alpha{}^1}{\partial p_i}\frac{\partial}{{}_*\partial q^i}-\frac{\partial\phi_\alpha{}^1}{{}_*\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}={}_*Y_\alpha{}^1={}_*\boldsymbol{X}_{\phi_\alpha{}^1} \tag{8-5-12}$$

(8-5-10)，(8-5-11)，(8-5-12) より

$$X_T \rightarrow {}_*X_T={}_*\boldsymbol{X}_H+v^\alpha{}_*\boldsymbol{X}_{\phi_\alpha{}^1}+\frac{\partial}{\partial t}={}_*\boldsymbol{X}_{H_T}+\frac{\partial}{\partial t} \tag{8-5-13}$$

拘束条件で A_{ij} の階数が下がった場合の，(8-4-25) の $\bar{X}_T$ に対しては

*) 第2式から第3式に移るときに，$\phi_\alpha{}^2=\tau_\alpha{}^iS_i\approx0$ を用いた．

**) 1次拘束条件 $\phi_\alpha{}^1$ の Hamilton ベクトル場を特別に ${}_*Y_\alpha{}^1$ と記す．

$$\bar{X}_T \rightarrow {}_*\bar{X}_T = {}_*X_H + v^\alpha {}_*X_{\phi_\alpha^1} + \bar{v}^\beta {}_*X_{\bar{\phi}_\beta} + \frac{\partial}{\partial t} = {}_*X_{H_T} + \frac{\partial}{\partial t} \qquad (8\text{-}5\text{-}14)$$

ここで

$$H_T = H + v^\alpha \phi_\alpha{}^1 + \bar{v}^\beta \bar{\phi}_\beta \qquad (8\text{-}5\text{-}15)$$

H_T の第２項までが Dirac が最初，提唱したものである．われわれの形式で許されるのは第３項である．これは２次第１類拘束そのものではない．２次拘束条件式で Hessian 行列の階数が縮減した場合，縮減した Hessian 行列の固有ベクトルに関連した第１類拘束のみが H_T に加わりうることを示している．われわれは $\phi_\alpha{}^1$, $\bar{\phi}_\beta$ を２次拘束と区別するため，“Hessian 行列に付随した拘束”と呼ぶ．速度位相空間での形式と整合であるためには上の（8-5-15）の全 Hamiltonian のみが許されるものである．これが前節の終わりで述べた Dirac の予測に対する疑問に関するわれわれの解答である．

上の結果を1-形式の形で書くと

$${}_*\rho^i({}_*X_T) \approx 0 \ ; \ {}_*\theta_i({}_*X_T) \approx 0. \qquad (8\text{-}5\text{-}16)$$

これを満たす ${}_*\rho^i$, ${}_*\theta_i$ は

$${}_*\rho^i = dq^i - \frac{\partial H_T}{\partial p_i} dt \ ; \ {}_*\theta_i = dp_i + \frac{\partial H}{{}_*\partial q^i} dt. \qquad (8\text{-}5\text{-}17)$$

あるいは，基本1-形式 ${}_*\Omega_T$ を用い，

$${}_*d\Omega_T \equiv dp_i \wedge dq^i - dH_T \wedge dt$$

より

$$d{}_*\Omega_T\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right) \approx 0 \ ; \ d{}_*\Omega_T\left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right) \approx 0. \qquad (8\text{-}5\text{-}18)$$

拘束 $\phi_\alpha{}^\mu$ に対する定常性の条件式は，$TQ \times R$ において (8-4-18) で与えたが，これを $T^*Q \times R$ へ移すと

$${}_*X_{T*}\phi_\alpha{}^\mu = \{{}_*\phi_\alpha{}^\mu, H_T\} + \frac{\partial_* \phi_\alpha{}^\mu}{\partial t} \approx 0 \qquad (8\text{-}5\text{-}19)$$

となる．これは§8-1で述べた Dirac の理論と同じものとなって，(8-1-17)，(8-1-18) と等しく，H_T の中の $v^\alpha {}_*\phi_\alpha$ の第２類拘束 ${}_*\overset{(2)}{\phi}_\alpha$ の前の $\overset{(2)}{v}{}^\alpha$ も§8-1で行ったように求まる．

以上は，速度位相空間から位相空間への写像であった．すでに前にも述べたが，ベクトル場の写像 $X_f \rightarrow {}_*X_f$ は常に可能であるが，逆は必ずしもいえない．これ

は速度位相空間では1次拘束条件式は恒等的に $\phi_\alpha{}^1\equiv 0$ であるためである．そこで，以下では，$_*X_f \to X_f$ が可能になる条件を調べよう*)．

$$_*\boldsymbol{X}_f=\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{_*\partial q^i}-\frac{\partial f}{_*\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}$$

は，(8-5-7) の第1式を用いて

$$_*\boldsymbol{X}_f=\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i}-\left\{\frac{\partial f}{\partial q^i}+\frac{\partial f}{\partial p_j}\left(\frac{\partial p_i}{\partial q^j}-\frac{\partial p_j}{\partial q^i}\right)\right\}\frac{\partial}{\partial p_i} \tag{8-5-20}$$

Hessian 行列 A_{ij} が非正則のため，速度位相空間内では $\partial/\partial p_i$ は正則でないが，次の条件

$$\tau_\alpha{}^i\left\{\frac{\partial f}{\partial q^i}+\frac{\partial f}{\partial p_j}\left(\frac{\partial p_i}{\partial q^j}-\frac{\partial p_j}{\partial q^i}\right)\right\}=0 \tag{8-5-21}$$

が満たされていると次のような $f_1{}^j(q,\xi)$ が存在する．

$$-\left\{\frac{\partial f}{\partial q^i}+\frac{\partial f}{\partial p_j}\left(\frac{\partial p_i}{\partial q^j}-\frac{\partial p_j}{\partial q^i}\right)\right\}(q,p(q,\xi))=A_{ij}f_1{}^j(q,\xi) \tag{8-5-22}$$

したがって X_f が存在して，次のように書かれる．

$$X_f=f_1{}^i\frac{\partial}{\partial \xi^i}+f_2{}^i\frac{\partial}{\partial q^i} \tag{8-5-23}$$

ここで

$$f_2{}^i\equiv\frac{\partial f}{\partial p_i}(q,p(q,\xi))$$

条件式 (8-5-21) は，(8-5-4 a)，(8-5-4 b) を用いると次のようになる．

$$\{_*\phi_\alpha{}^1,{}_*f\}=0,\quad \mathrm{mod}(_*\phi_\beta{}^1). \tag{8-5-24}$$

$_*f$ として第1類の $_*\phi_\beta{}^1$ をとれば，(8-4-16) の脚注で述べたように上式が満たされるので，$_*Y_\alpha{}^1={}_*\boldsymbol{X}_{\phi_\alpha{}^1}$ から速度位相空間におけるベクトル場 $Y_\alpha{}^1$ への写像が存在する．(8-5-12) は第1類に限らず，すべての $\phi_\alpha{}^1$ に対して $\phi_\alpha{}^2\approx 0$ のもとで $Y_\alpha{}^1\to{}_*\boldsymbol{X}_{\phi_\alpha{}^1}$ の逆が存在することを示す．

X_T は $\phi_\alpha{}^2=0$ のもとで存在したので，$_*\boldsymbol{X}_{H_T}\to X_T$ が存在するためには

$$\{H_T,\phi_\alpha{}^1\}=0\quad \mathrm{mod}(\phi^1,\phi^2) \tag{8-5-25}$$

---

*) 拘束条件のある場合，ベクトル場は $X_f\to{}_*X_f$ が，微分形式は $d_*f\to df$ が常に可能であるが逆は必ずしも存在しない．これが速度位相空間での定式化はベクトル場が，位相空間での定式化は微分形式が適している理由である．

である．上式が満たされているから

$$_*X_{H_T} \rightarrow X_T = \eta^i \frac{\partial}{\partial \xi^i} + \xi^i \frac{\partial}{\partial q^i} + u^a Z_a + v^a Y_a^1 + v^s Y_s^1 + \frac{\partial}{\partial t}. \tag{8-5-26}$$

Y_a^1 は位相空間での ϕ_a^1 に対応したベクトル場である．速度位相空間では $\phi_a^1 \equiv 0$ なので現れないが，ベクトル場形式での生成子 X_T の中にベクトル場 Y_a^1 として暗黙のうちに含まれている．

位相空間における拘束条件の整合性に対する条件式

$$\begin{aligned} {}_*\phi_a{}^{\mu+1}(q, p) &\equiv \{{}_*\phi_a{}^{\mu}, H\}, \quad \mu = 1, \cdots, m-1, \\ {}_*\phi_a{}^{m+1}(q, p) &\equiv \{{}_*\phi_a{}^{m}, H\} = {}_*c_{a\mu}{}^{\beta}\,{}_*\phi_\beta{}^{\mu} \end{aligned} \tag{8-5-27}$$

を速度位相空間に移そう．速度位相空間内では Poisson 括弧式は使えないので，ベクトル場の形式で上の条件式を書き換えて始めなければならない．そのためには，第 5 章で導いた（5-3-22）の公式

$$[{}_*X_f, {}_*X_g] = -{}_*X_{\{f, g\}}$$

を用いよう．これにより（8-5-27）は

$$\begin{aligned} {}_*Y_a{}^{\mu+1} &= [{}_*X_H, {}_*Y_a{}^{\mu}] \\ {}_*Y_a{}^{m+1} &= [{}_*X_H, {}_*Y_a{}^{m}] = {}_*c_{a\mu}{}^{\beta}{}_*\,Y_\beta{}^{\mu} + {}_*\phi_a{}^{\mu}\,{}_*Xc_{a\mu}{}^{\beta} \end{aligned} \tag{8-5-28}$$

ここで ${}_*Y_a{}^{\mu} \rightarrow Y_a{}^{\mu}$，${}_*X_H \rightarrow X_t$ はすでに与えられているので，（8-5-28）は $\phi_a{}^{\mu}=0$ 上で

$$\begin{aligned} Y_a{}^{\mu+1} &\equiv [X_T, Y_a{}^{\mu}], \\ Y_a{}^{m+1} &\equiv [X_T, Y_a{}^{m}] = c_{a0}{}^{\beta} Z_\beta + c_{a\mu}{}^{\beta} Y_\beta{}^{\mu} + \phi_\beta{}^{\mu} X c_{a\mu}{}^{\beta} \end{aligned} \tag{8-5-29}$$

となる．注意すべきは ${}_*Z_a = 0$ なのに右辺に Z_β が現れることである．

終わりに，全 Hamiltonian を求める別の方法を示しておく．そのために，運動量 $p_i(q, \xi)$ の中の ξ は位相空間では任意性があることに注目する．

$$\bar{\xi}^i = \xi^i + v^a \tau_a{}^i, \quad v^a：任意 \tag{8-5-30}$$

とおく．$p_i(q, \bar{\xi})$ を $p_i(q, \xi)$ のまわりで，$(v^a \tau_a{}^i)$ で展開してみよう．

$$p_i(q, \bar{\xi}) = p_i(q, \xi) + A_{ij} v^a \tau_a{}^j + \frac{1}{2} \frac{\partial A_{ij}}{\partial \xi^k} v^a \tau_a{}^j v^\beta \tau_\beta{}^k + \cdots$$

右辺第 2 項は $A_{ij}\tau_a{}^j = 0$ で落ちて，第 3 項以下は

$$\tau_a{}^j \tau_\beta{}^k \frac{\partial A_{ij}}{\partial \xi^k} = \tau_a{}^j \tau_\beta{}^k \frac{\partial A_{jk}}{\partial \xi^i} = -\tau_a{}^j A_{jk} \frac{\partial \tau_\beta{}^k}{\partial \xi^i} = 0$$

の関係式を用いると，0 になることがわかる．したがって

$$p_i(q,\xi)=p_i(q,\bar{\xi}) \tag{8-5-31}$$

$L(q,\bar{\xi})$ を $L(q,\xi)$ のまわりで展開することによって示される

$$L(q,\bar{\xi})=L(q,\xi)+v^\alpha\tau_\alpha{}^i p_i(q,\xi)$$

に注目すると，H_T として*)

$$H_T(q,p)=p_i\bar{\xi}^i-L(q,\bar{\xi})\approx p_i\xi^i-L(q,\xi) \tag{8-5-32}$$

ととると

$$dH_T=\bar{\xi}^i dp_i-\left.\frac{\partial L}{\partial q^i}\right|_{\bar{\xi}} dq^i$$

これから

$$\frac{\partial H_T}{\partial p_i}=\bar{\xi}^i=\xi^i+v^\alpha\tau_\alpha{}^i=\xi^i+v^\alpha\frac{\partial\phi_\alpha{}^1}{\partial p_i} \tag{8-5-33 a}$$

$$\frac{\partial H_T}{{}_*\partial q^i}=-\left.\frac{\partial L(q,\bar{\xi})}{\partial q^i}\right|_{\bar{\xi}}=-\left.\frac{\partial L(q,\xi)}{\partial q^i}\right|_{\xi}+\left.\frac{\partial}{\partial q^i}(v^\alpha\tau_\alpha{}^j p_j)\right|_{v\tau}$$
$$=-\left.\frac{\partial L}{\partial q^i}\right|_{\xi}-v^\alpha\tau_\alpha{}^j\frac{\partial p_j}{\partial q^i}=-\left.\frac{\partial L}{\partial q^i}\right|_{\xi}+v^\alpha\frac{\partial\phi_\alpha{}^1}{{}_*\partial q^i} \tag{8-5-33 b}$$

終わりの式にいくときに，(8-5-4 b)を用いた．この式から H_T に $\phi_\alpha{}^1$ の任意性があり

$$H_T=H+v^\alpha\phi_\alpha{}^1$$

が導かれる．

例 8-6

例8-5の Cawley の Lagrangian

$$L=\dot{q}^1\dot{q}^3+\frac{1}{2}q^2(q^3)^2$$

を考える．$A_{ij}=\delta_{i1}\delta_{j3}+\delta_{i3}\delta_{j1}$ であるから $\tau^i=\delta_{i2}$．これに付随する ϕ_α，すなわち $\partial\phi_\alpha/\partial p_2=\tau^i=\delta_{i2}$ となる ϕ_α は $\phi_\alpha=p_2$ で，$R_{ij}=0$，$S_i=(0,(1/2)(q^3)^2,q^2q^3)$，$S_i\tau^i=(1/2)(q^3)^2$，これから $\chi_1=q^3\approx0$．生成系は

$$X_T=-q^2q^3\frac{\partial}{\partial\xi^2}+\xi^i\frac{\partial}{\partial q^i}+vY+uZ+\frac{\partial}{\partial t},$$
$$Y=\frac{\partial}{\partial q^2},\quad Z=-\frac{\partial}{\partial\xi^2}$$

$\chi_1\approx0$ の定常性の条件を考えると $X_T\chi_1=\chi_2=\xi^3\approx0$；$X_T\chi_2\equiv X_T\xi^3=0$．拘束条件は

---

*）p_i は位相空間では独立変数と見なす．したがって ${}_*\phi_\alpha{}^1\approx0$ のもとで $p_i=p_i(q,\xi)$ となる．(8-5-32) の第２式の≈はこのためである．

$\chi_1 \equiv q^3 \approx 0$, $\chi_2 \equiv \xi^3 \approx 0$ で，これによって A_{ij} の階数は縮減されないので，$\bar{\phi}_\beta$ は生じない．したがって H_T には vp_2 しか許されない．

例 8-7

Hessian 行列 A_{ij} の階数が下がる例で，Frenkel が出した力学系を考える［7］．

$$L = \xi^1(\xi^3)^2 - \frac{1}{2}q^2(q^3)^2,$$

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\xi^3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2\xi^3 & 0 & 2\xi^1 \end{pmatrix};\ \tau^i = \delta_{i2};\ S_i = \left(0, \frac{1}{2}(q^3)^2, q^2 q^3\right)$$

$$S_i \tau^i = \frac{1}{2}(q^3)^2 \approx 0,$$

これを線形化したものを拘束条件としよう．

$$\chi_1 (= \phi^2) = q^3 \approx 0.$$

したがって，$S_i \approx 0$，よって $\eta^i \approx 0$ である．生成系は

$$X_t = \xi^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{\partial}{\partial t}\ ;\ Z = -\frac{\partial}{\partial \xi^2}$$

$$Y = [X_t, Z] = \frac{\partial}{\partial q^2}.$$

これから

$$X_T = \xi^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial q^2} + u\frac{\partial}{\partial \xi^2}.$$

χ_1 の定常性から

$$X_t \chi_1 \equiv \chi_2 = \xi^3 \approx 0, \quad X_t \xi^3 = 0.$$

$\xi^3 \approx 0$ のため

$$\bar{A}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\xi^1 \end{pmatrix},\quad \text{よって}\ \bar{\tau} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ただし $\bar{\tau}$ は $\bar{A}_{ij}\bar{\tau}^j = 0$ を満たす新たな固有ベクトルである．したがって

$$\bar{X}_T = \xi^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial \xi^2} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial \xi^1} + v\frac{\partial}{\partial q^2} + \bar{v}\frac{\partial}{\partial q^1}$$

位相空間でいえば $\phi_1=p_2$ で $\bar{\phi}_1=p_1$ で

$$H_T=H+vp_2+\bar{v}p_1\ ;\ ここで\ H=\sqrt{p_1}p_3+\frac{1}{2}q^2(q^3)^2.$$

Frenkel は $\bar{v}p_1$ を入れなかったため，Dirac の予測を含めて矛盾が生ずる模型であるとした．われわれの方法では $\bar{v}p_1$ が自然に入り矛盾は生じない[7]．参考のため両空間における運動方程式と解を書いて両者の整合性を示しておく．

	速度位相空間	位相空間
方程式	$\dot{q}^1=\xi^1+\bar{v}$; $\dot{q}^2=\xi^2+v$; $\dot{q}^3=\xi^3$; $\dot{\xi}^1=\bar{u}$; $\dot{\xi}^2=u$; $\dot{\xi}^3=0$.	$dq^1-\frac{1}{2}\left(\frac{p_3}{\sqrt{p_1}}+\bar{v}\right)dt\approx0$; $dq^2-vdt\approx0$; $dq^3\approx0$; $dp_i\approx0$ $(i=1,2,3)$.
解	q^1, q^2, ξ^1, ξ^2：任意 $q^3\approx\xi^3\approx0$.	$p_1\approx p_2\approx q^3\approx0$; $p_3=0$. ($p_3\approx0$ は第1式の $p_3/\sqrt{p_1}$ が意味をもつためである．これは $p_3=2\xi^1\xi^3$, $\xi^3\approx0$ とも整合している．)

例 8-8

電磁場の Hamilton 関数に2次第1類拘束を加えたものと，通常のわれわれのものとの比較を行おう．簡単のため外場のない場合をとって話を進めよう．Lagrange 関数

$$L=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\ ;\ F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$$

から A_0, A_j に対する正準運動量は

$$\pi^0=0\ ;\ \pi^j=F_{0j}$$

Hamilton 関数は

$$H=\int d^3x\left[-\frac{1}{2}\pi_i\pi^i-A_0(\partial_i\pi^i)+\frac{1}{4}F_{ij}F^{ij}\right]$$

1次，2次拘束として

$$\phi\equiv\pi^0\approx0$$

$$\chi\equiv\partial_i\pi^i\approx0$$

の2個の第1類拘束条件式を得る．

$$H_T=H+\int d^3xu^1(\boldsymbol{x})\pi^0(\boldsymbol{x})$$

より導かれる運動方程式は次式で与えられる．

$$\partial_0 A_0 = u^1 \ ; \ \partial_0 A_j = \pi^j + \partial_j A^0$$
$$\partial_0 \pi^0 = 0 \quad ; \ \partial_0 \pi^i = \partial_j F^{ji} \qquad \text{(a)}$$

われわれのゲージ変換の生成子のつくり方によると（§9-1 参照）

$$G = \int d^3x \{ \dot{\varepsilon}(x)\pi^0 - \varepsilon(x)\partial_i \pi^i(x) \}$$

である．これによりゲージ変換として

$$\delta A_\mu(x) = \partial_\mu \varepsilon(x), \quad \delta \pi^\mu(x) = 0$$

を得る．いま $\delta u^1 = \ddot{\varepsilon}$ とすれば H_T から得られた正準運動方程式はゲージ不変である．

ここで Dirac の予測した形の拡張された Hamilton 関数（u^1, u^2 は任意関数）

$$H_E = H + \int d^3x \{ u^1(x)\pi^0(x) + u^2(x)\partial_i \pi^i(x) \}$$

から運動方程式を求めると次式を得る [8]．

$$\partial_0 A_0 = u^1, \quad \partial_0 A_j = \pi^j + \partial_j A_0 - \partial_j u^2,$$
$$\partial_0 \pi^0 = 0, \qquad \partial_0 \pi^i = \partial_j F^{ji} \qquad \text{(b)}$$

（a）と（b）の第２式は異なり，（b）の第２式は A_j に対する正準運動量の定義式と異なる．（b）は次のゲージ変換の生成子（われわれの方法とは異なる）

$$\tilde{G} = \int d^3x \{ \varepsilon^1(x)\pi^0(x) + \varepsilon^2(x)\partial_i \pi^i(x) \}$$

によって得られるゲージ変換

$$\delta A_0(x) = \varepsilon^1(x), \quad \delta A_j(x) = -\partial_j \varepsilon^2(x) \ ; \ \delta \pi^\mu(x) = 0$$

に対して不変である．ただし $\varepsilon^1, \varepsilon^2$ は任意関数で，u_i に対するゲージ変換と次の関係式で結ばれているとする．

$$\delta u^1 = \partial_0 \varepsilon^1 \ ; \ \delta u^2 = \partial_0 \varepsilon^2 + \varepsilon^1$$

ゲージ不変な変数に対しては，（a），（b）ともに

$$\partial_0 F^{ij} = \partial^i \pi^j - \partial^j \pi^i \ ; \ \partial_0 \pi^j = \partial_i F^{ij}$$

となり Maxwell 方程式と同じ形に書ける．（b）の第２式が Lagrange 関数より定義された π^i と一致しないという意味で，H_E から出発した正準形の理論は Lagrange 形式と整合的ではないといえる．

§ 8-6　量子化および自由度無限大の系への移行

量子論へ移るには，よく知られているように，q^i, p_j を線形演算子とし，これらが作用する波動関数 ψ を導入し，Schrödinger 方程式として

$$i\hbar\frac{d\psi}{dt}=H\psi \tag{8-6-1}$$

とおき，第1類拘束条件を次のように ψ に対する条件式

$$\phi_\alpha{}^k\psi=0 \tag{8-6-2}$$

としておく．力学量 f，g に対し，Poisson 括弧を交換関係式と次のように

$$\{f, g\}=\frac{1}{i\hbar}[f, g]=\frac{1}{i\hbar}(fg-gf) \tag{8-6-3}$$

対応させる．

$\phi_\alpha{}^k\psi=0$，$\phi_{\alpha'}{}^{k'}\psi=0$ に左から $\phi_{\alpha'}{}^{k'}$，$\phi_\alpha{}^k$ をそれぞれ掛けた式を考える．これらの式の整合性から $[\phi_{\alpha'}{}^{k'}, \phi_\alpha{}^k]\psi=0$ が満たされねばならない．$[\phi_{\alpha'}{}^{k'}, \phi_\alpha{}^k]$ は古典では $i\hbar\{\phi_{\alpha'}{}^{k'}, \phi_\alpha{}^k\}$ である．2つの第1類拘束の Poisson 括弧はやはり第1類であるので*)，$\phi_\alpha{}^k$ が第1類であれば問題は生じない．第2類拘束条件を $\theta_s\psi=0$ とおくと，$\{\theta_{s'}, \theta_s\}$ は0でないので矛盾が生じる．これを除くには，$\theta_s\approx 0$ を強い意味での等式にしなければならない．このため Dirac 括弧をとって，

$$\{f, g\}^*=\frac{1}{i\hbar}[f, g]=\frac{1}{i\hbar}(fg-gf) \tag{8-6-4}$$

と対応をつけなければならない．Dirac 括弧は元来，量子化への過程のひとつとしておかれたものである．

場の理論への移行についての一般的なことは第7章で述べたので，ここでは場の理論における Dirac 括弧についてのみ付け加えておく．場の量 $\varphi_a(x)$ とそれに共役な正準運動量 $\pi^a(x)$ との間には，同時刻の Poisson 括弧として

$$\{\varphi_a(t, \boldsymbol{x}), \pi^b(t, \boldsymbol{x}')\}=\delta_a{}^b\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{8-6-5}$$

を設定する．第2類拘束条件式を $\theta_s\approx 0$ とする．θ_s 間の同時刻の Poisson 括弧は

$$C_{su}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')=\{\theta_s(t, \boldsymbol{x}), \theta_u(t, \boldsymbol{x}')\} \tag{8-6-6}$$

---

*）　2つの第1類拘束を ϕ_1, ϕ_2 とする．すべての拘束条件 ϕ に対し，Jacobi の恒等式から，$\{\phi, \{\phi_1, \phi_2\}\}=\{\{\phi, \phi_1\}, \phi_2\}-\{\{\phi, \phi_2\}, \phi_1\}$ を得る．$\{\phi, \phi_1\}$，$\{\phi, \phi_2\}$ は第1類，第2類拘束の線形結合で表されるので右辺は弱等式で0である．

この逆行列 $(C^{-1})^{su}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$ は

$$\int dz (C^{-1})^{su}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) C_{uv}(t, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}) = \delta^s{}_v \, \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{8-6-7}$$

で定義される．これを用いて Dirac 括弧は次のように書かれる．

$$\{f(t, \boldsymbol{x}), g(t, \boldsymbol{y})\}^* = \{f(t, \boldsymbol{x}), g(t, \boldsymbol{y})\} - \int dz\, dw \{f(t, \boldsymbol{x}), \theta_s(t, \boldsymbol{z})\} (C^{-1})^{su}(t, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}) \{\theta_u(t, \boldsymbol{w}), g(t, \boldsymbol{y})\} \tag{8-6-8}$$

例 8-9

Dirac 括弧を使って正しく量子化へ移らないとよく間違える例として，次の模型を考えよう[9]：(便宜上，$c=\hbar=1$ の単位系で行う．)

$$L = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}M^2 A_\mu A^\mu + g\varphi\partial_\mu A^\mu \tag{8-6-9}$$

ただし

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{8-6-10}$$

ここに φ, A_μ はスカラー場，ベクトル場で，それらの質量は m, M である．g は相互作用の定数である．(8-6-9) から導かれる運動方程式は

$$\Box\varphi = -m^2\varphi + g\partial_\mu A^\mu, \tag{8-6-11}$$

$$(\Box\eta_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu) A^\nu = -M^2 A_\mu - g\partial_\mu\varphi \tag{8-6-12}$$

(8-6-12) より

$$\partial_\mu A^\mu = \frac{g}{M^2}\Box\varphi, \tag{8-6-13}$$

これから (8-6-11) は

$$\Box\varphi - \mu^2\varphi = 0 \;;\; \mu^2 = m^2\frac{M^2}{M^2-g^2}. \tag{8-6-14}$$

となる．ここで次の置き換えをしよう．

$$A_\mu = \mathscr{A}_\mu + \frac{g}{M^2}\partial_\mu\varphi. \tag{8-6-15}$$

すると，(8-6-12) は

$$(\Box\eta_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu)\mathscr{A}^\nu = -M^2\mathscr{A}_\mu \tag{8-6-16}$$

となる．これから次式を得る．

$$\partial_\mu \mathscr{A}^\mu = 0\ ;\ \Box \mathscr{A}_\mu = -M^2 \mathscr{A}_\mu \tag{8-6-17}$$

i) 誤った解

上の方程式 (8-6-14), (8-6-17) から次のような4次元交換関係式が予測される.

$$\begin{aligned} &[\varphi(x), \varphi(x')] = i\Delta(x-x', \mu^2), \\ &[\mathscr{A}_\mu(x), \mathscr{A}_\mu(x')] = i\left(-\eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{M^2}\right)\Delta(x-x', M^2), \\ &[\varphi(x), \mathscr{A}_\nu(x')] = 0, \end{aligned} \tag{a}$$

ここで

$$\Delta(x-x', \mu^2) = \frac{i}{2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d\boldsymbol{p}}{\sqrt{\boldsymbol{p}^2+\mu^2}}\{e^{ip_\mu(x-x')^\mu} - e^{-ip_\mu(x-x')^\mu}\},$$

$$\partial^0 \Delta(x-x')|_{t=t'} = -\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}').$$

上の4次元交換関係式と (8-6-15) を用いると

$$[A_\mu(x), A_\nu(x')] = i\left(-\eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{M^2}\right)\Delta(x-x', M^2) - \frac{g^2}{M^4}\partial_\mu \partial_\nu \Delta(x-x', \mu^2) \tag{b}$$

$$[A_\mu(x), \varphi(x')] = i\frac{g}{M^2}\partial_\mu \Delta(x-x', \mu^2) \tag{c}$$

一方, 正準運動量は

$$\pi = \partial_0 \varphi\ ;\ \pi^0 = g\varphi\ ;\ \pi^i = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 \tag{8-6-18}$$

この中で $\pi^0 - g\varphi = 0$ が1次拘束条件式で, その定常性から

$$-\partial_i \pi^i - M^2 A_0 + g\pi = 0 \tag{8-6-19}$$

(8-6-18), (8-6-19)と, 同時刻における交換関係式(8-6-5)のみを用いると, $t=t'$ で

$$[A_i(x), \partial_0' \varphi(x')] = [A_i(x), \pi(x')] = 0 \tag{d}$$

$$[A_i(x), A_0(x')] = \frac{1}{M^2}[A_i(x), -\partial_i' \pi^i(x') + g\pi^i(x')] = \frac{i}{M^2}\partial_i \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'), \tag{e}$$

$$[A_i(x), \partial_0' A_j(x')] = [A_i(x), \pi^j(x') + \partial_j' A_0(x')] = i\left(-\eta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{M^2}\right)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'). \tag{f}$$

一方(c)から同時刻の交換関係として

$$[A_i(x), \partial_0' \varphi(x')] = \frac{ig}{M^2}\partial_i \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'), \tag{d'}$$

(b)から

$$[A_i(x), A_0(x')] = i\frac{1}{M^2}\left(1+\frac{g}{M^2}\right)\partial_i\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'), \qquad (\mathrm{e}')$$

$$[A_i(x), \partial_0' A_j(x')] = i\left(-\eta_{ij}-\frac{\partial_i\partial_j}{M^2}\right)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') - \frac{ig^2}{M^4}\partial_i\partial_j\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'). \qquad (\mathrm{f}')$$

(d), (e), (f)と(d′), (e′), (f′)とは明らかに矛盾している．上の導出にあたって，2つの大きな誤りを犯している．以下，誤りを正そう．

ii） 正しい解

(8-6-15) を (8-6-9) に代入すると

$$L = \frac{1}{2}\frac{M^2-g^2}{M^2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}M^2\mathscr{A}_\mu\mathscr{A}^\mu \qquad (8\text{-}6\text{-}20)$$

ここで $F_{\mu\nu} = \partial_\mu\mathscr{A}_\nu - \partial_\nu\mathscr{A}_\mu$ である．これは (8-6-15) は一種のゲージ変換に相当しているので，もとの $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ に等しい．しかし (8-6-20) では力学変数としては $\mathscr{A}_\mu$ をとらねばならない．この Lagrange 関数 (8-6-20) から，φ, $\mathscr{A}_\mu$ に対する 4 次元交換関係式として次のものが得られる．

$$[\mathscr{A}_\mu(x), \mathscr{A}_\nu(x')] = i\left(-\eta_{\mu\nu}-\frac{\partial_\mu\partial_\nu}{M^2}\right)\Delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}', M^2), \qquad (8\text{-}6\text{-}21)$$

$$[\mathscr{A}_\mu(x), \varphi(x')] = 0, \qquad (8\text{-}6\text{-}22)$$

$$[\varphi(x), \varphi(x')] = i\frac{M^2}{M^2-g^2}\Delta(x-x', \mu^2). \qquad (8\text{-}6\text{-}23\,\mathrm{a})$$

(8-6-15), (8-6-21), (8-6-22), (8-6-23 a) から A_μ に対する 4 次元交換関係式として，(8-6-23 a) とともに，

$$[A_\mu(x), A_\nu(x')] = i\left(-\eta_{\mu\nu}-\frac{\partial_\mu\partial_\nu}{M^2}\right)\Delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}', M^2) - i\frac{g^2}{M^2(M^2-g^2)}\partial_\mu\partial_\nu\Delta(x-x', \mu^2)$$

$$(8\text{-}6\text{-}23\,\mathrm{b})$$

$$[A_\mu(x), \varphi(x')] = i\frac{g}{M^2-g^2}\partial_\mu\Delta(x-x', \mu^2) \qquad (8\text{-}6\text{-}23\,\mathrm{c})$$

を得る．

ここでさらに注意すべきことは，(8-6-18) の中の

$$\theta_1 \equiv \pi^0 - g\varphi \approx 0$$

および 2 次拘束条件式

$$\theta_2 \equiv -\partial_i\pi^i - M^2A_0 + g\pi \approx 0$$

は第2類拘束条件式であることである．実際

$$C_{12}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \{\theta_1(\boldsymbol{x}, t), \theta_2(\boldsymbol{x}', t)\} = (M^2 - g^2)\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')$$

である．したがって，このように第2類拘束条件が存在する場合には，(8-6-7)，(8-6-8) によって Dirac 括弧をとり量子化へ移行しなければならない．すなわち，

$$(C^{-1})^{12}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = -\frac{1}{M^2 - g^2}\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')$$

によって Dirac 括弧をつくり，(8-6-4) で交換関係と対応させなければならない．こうして得られた同時刻の交換関係式であることを明示するため[,]* とすると

$$[A_i(x), \pi(x')]^* = [A_i(x), \partial_0{}'\varphi(x')]^* = i\frac{g}{M^2 - g^2}\partial_i\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'), \qquad (8\text{-}6\text{-}24\,\mathrm{a})$$

$$[A_i(x), A_0(x')]^* = i\frac{1}{M^2 - g^2}\partial_i\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'), \qquad (8\text{-}6\text{-}24\,\mathrm{b})$$

$$[A_i(x), \partial_0{}'A_j(x')]^* = i\left(-\eta_{ij} - \frac{\partial_i\partial_j}{M^2 - g^2}\right)\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'),$$

$$[\varphi(x), \pi(x')]^* = \frac{1}{g}[\pi^0(x), \pi(x')]^* = \frac{M^2}{g}[\varphi(x), A_0(x')]^* = \frac{M^2}{g^2}[\pi^0(x), A_0(x')]^*$$

$$= i\frac{M^2}{M^2 - g^2}\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \qquad (8\text{-}6\text{-}24\,\mathrm{c})$$

これらからわかるように，(8-6-23) と (8-6-24) の間には矛盾はない．

ｉ)の間違った解に至った原因は，4次元交換関係式を，方程式 (8-6-14)，(8-6-16)の形のみから導いたことである．正しくは，基本になる場 φ, $\mathscr{A}_\mu$ に対する正しい Lagrangian から交換関係を導かねばならない．もうひとつの理由は，第2類拘束条件式は Dirac 括弧によって扱わねばならなかったことである．

第9章　ゲージ変換の生成子

§9-1　運動方程式の不変性とゲージ変換の生成子のつくり方

点変換の特殊なものに対して Lagrangian が不変であるときは，その Lagrangian は非正則になることを，§2-5 において点粒子に対して示した．さらに§8-3 においては，1次のみでなく，2次拘束条件もゲージ変換の生成子に含まれることを述べた．従来はゲージ変換の生成子の形を目の子で求めていたが，ここでその形を系統的に与える方法を示す [1]

全 Hamiltonian H_T の中の $v^\alpha\phi_\alpha$ の係数 v^α （$\alpha=1, \cdots, r$）の任意性とゲージ変換との関係については§8-3 で述べた．これを図示すれば，図 9-1 である．点粒子が $t=t_0$ に同一点（q_0, p_0）から出発しても v の値の違いにより $t=t_1$ では異なる点に移行するが，物理的状態はオブザーバブル q^{ob}, p^{ob} で定まることを示した．

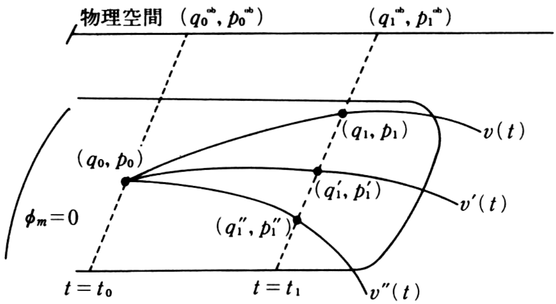


図 9-1

本節ではまず第2類拘束条件のない，第1類拘束のみ現れる力学系を扱い，第2類拘束がある一般の場合は§9-4 で行なう．

位相空間での力学量 $f(q, p, t)$ の運動方程式は

$$\dot{f}(q, p, t)={}_*X_T f=\{f, H_T\}+\frac{\partial f}{\partial t} \tag{9-1-1}$$

ただし

$$ {}_*X_T=\frac{\partial H_T}{\partial p_i}\frac{\partial}{{}_*\partial q^i}-\frac{\partial H_T}{{}_*\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}+\frac{\partial}{\partial t} \tag{9-1-2}$$

$$ H_T=H+v^\alpha{}_*\phi_\alpha{}^1 \tag{9-1-3}$$

方程式（9-1-1）で異なる v^α をもつものも ${}_*\phi_\alpha{}^1\approx 0$ 上においては物理的に同等である．すなわち，q^i，p_i のゲージ変換

$$ q^i\to q^i+\delta q^i,\quad p_i\to p_i+\delta p_i \quad (i=1,\cdots,N)$$

と

$$ v^\alpha\to v^\alpha+\delta v^\alpha$$

とは同一であると見なされる．よって

$$ {}_*X_T|_{q+\delta q,\ p+\delta p,\ v}={}_*X_T|_{q,\ p,\ v+\delta v} \tag{9-1-4}$$

ここで，${}_*X_T|_{a,\ b,\ c}$ は ${}_*X_T$ の中の q, p, v を a, b, c で置き換えたものである．ゲージ変換の生成子を ${}_*\boldsymbol{X}_G$ とする．すなわち

$$ \delta{}_*q^i={}_*\boldsymbol{X}_G q^i,\qquad \delta{}_*p_i={}_*\boldsymbol{X}_G p_i \tag{9-1-5}$$

（9-1-4）は ${}_*\boldsymbol{X}_G$ を用いるとベクトル場のLie微分の定義（1-3-12）と公式（1-3-14）により

$$ [{}_*\boldsymbol{X}_G,\ {}_*\boldsymbol{X}_T]={}_*X_T|_{q+\delta q,\ p+\delta p,\ v}-{}_*X_T|_{q,\ p,\ v}={}_*\boldsymbol{X}_{\delta v\phi^1} \tag{9-1-6}$$

と表される．上式で δq^i，δp_i が（1-3-12）の $t\xi^i$ であり，パラメータ t はゲージ変換の微小任意関数 ${}_*\varepsilon$（後述）に対応する．実際に（9-1-6）が成立することは次のように示される．${}_*X_T$ の定義式（9-1-2）により

$$ {}_*X_T|_{q+\delta q,\ p+\delta p,\ v}-{}_*X_T|_{q,\ p,\ v}=\frac{\partial}{\partial p_i}({}_*\boldsymbol{X}_G H_T)\frac{\partial}{{}_*\partial q^i}-\frac{\partial}{{}_*\partial q^i}({}_*\boldsymbol{X}_G H_T)\frac{\partial}{\partial p_i}$$

$$ =-\frac{\partial}{\partial p_i}\{{}_*G, H_T\}\frac{\partial}{{}_*\partial q^i}+\frac{\partial}{{}_*\partial q^i}\{{}_*G, H_T\}\frac{\partial}{\partial p_i}=-\boldsymbol{X}_{\{{}_*G,\ H_T\}} \tag{9-1-7}$$

となる．上の変形には（9-1-5）から得られる ${}_*\boldsymbol{X}_G$ の表式と（5-3-5）式

$$ {}_*\boldsymbol{X}_G=\delta{}_*q^i\frac{\partial}{{}_*\partial q^i}+\delta{}_*p_i\frac{\partial}{\partial p_i},\quad {}_*\boldsymbol{X}_G H_T=-\{{}_*G, H_T\} \tag{9-1-8}$$

を用いた．

ここで，これまでよく用いたHamiltonベクトル場に対する関係式（(5-3-22) 参照）

$$ [\boldsymbol{X}_f, \boldsymbol{X}_g]=-{}_*\boldsymbol{X}_{\{f,\ g\}} \tag{9-1-9}$$

を使うと（9-1-6）が得られる．さらに（9-1-9）を用いると（9-1-6）は次のよう

に書ける*)．

$$_*X_T G=\{G, H_T\}+\frac{\partial G}{\partial t}=-\delta v^{\alpha}{}_*\phi_{\alpha}{}^1 \tag{9-1-10}$$

これは拘束条件 $_*\phi_{\alpha}{}^1\approx 0$ のもとでの G の定常条件に他ならない．G は任意時刻での微小ゲージ変換の生成子（生成母関数）であるから，この条件は当然満たされなければならない．

(9-1-10) は $\{G,\ H_T\}$ から2次拘束条件式が出てくるときは G が1次拘束のみならず2次以降の高次第1類拘束を含まなければならぬことを示している．

よって

$$G={}_*\varepsilon^{\alpha}{}_{\mu}{}_*\phi_{\alpha}{}^{\mu} \tag{9-1-11}$$

として，$\phi_{\alpha}{}^{\mu}$ の定常条件式

$$\{{}_*\phi_{\alpha}{}^{\mu}, H_T\}+\frac{\partial{}_*\phi_{\alpha}{}^{\mu}}{\partial t}={}_*\phi_{\alpha}{}^{\mu+1}\ ;\ {}_*\phi_{\alpha}{}^{m+1}={}_*C_{\alpha\mu}{}^{\beta}{}_*\phi_{\beta}{}^{\mu} \tag{9-1-12}$$

と (9-1-10) を用いて $_*\varepsilon^{\alpha}{}_{\mu}(q, p, t)$ を定めることができる**)

$$_*\dot{\varepsilon}^{\alpha}{}_{\mu}{}_*\phi_{\alpha}{}^{\mu}+{}_*\varepsilon^{\alpha}{}_{\mu}{}_*\phi_{\alpha}{}^{\mu+1}{}_{\alpha}+{}_*\varepsilon^{\alpha}{}_{m}C_{\alpha\mu}{}^{\beta}{}_*\phi_{\beta}{}^{\mu}\equiv 0 \qquad \mathrm{mod}\,({}_*\phi^1) \tag{9-1-13}$$

ここで $_*\dot{\varepsilon}^{\alpha}{}_{\mu}\equiv{}_*X_T{}_*\varepsilon^{\alpha}{}_{\mu}$ である．

しかし，G の定常条件 (9-1-10) には H_T の中に不定の任意関数 v^{α} が入っているので次の2つの式に分解される．

$$_*X_t G=\{G, H\}+\frac{\partial G}{\partial t}=-{}_*\varepsilon^{\alpha}{}_0{}_*\phi_{\alpha}{}^1 \tag{9-1-14 a}$$

$$\{G, {}_*\phi_{\alpha}{}^1\}\equiv 0 \qquad \mathrm{mod}\ ({}_*\phi^1) \tag{9-1-14 b}$$

ここで $_*X_t={}_*X_T(v=0)$ である．上の第2式は§8-5で与えた $_*X_G\to X_G$ が存在するための条件式 (8-5-24) に他ならない．この条件式はゲージ変換の定義に重要な役割を果たす．

G の定常条件として (9-1-14) をおくと，$_*\phi_{\alpha}{}^{\mu}$ の定常条件を (9-1-12) の代りに H_T を H で置き替えた

---

*) 以下 $_*G$ の * は G については略すが，位相空間と速度位相空間での区別をはっきりさせるときには，$\phi_{\alpha}{}^1$ 等の位相空間での表式には $_*\phi_{\alpha}{}^1$ のように $_*$ をつける．

**) $_*\phi_{\alpha}{}^{\mu}$ の定常条件としては，$_*\phi_{\alpha}{}^{\mu+1}$ をなるべく簡単にするために (9-1-12) の第1式は mod $({}_*\phi^1,\ {}_*\phi^2,\ \cdots,\ {}_*\phi^{\mu})$ のもとで定義してよいが，(9-1-13) を得るには強い等式で定義した方がよい．また m は α により異なってもよいので m_{α} とすべきであるが略す．m が α に依存する場合への一般化は容易である．

$$\{{}_*\phi_\alpha{}^\mu,\ H\}+\frac{\partial{}_*\phi_\alpha{}^\mu}{\partial t}={}_*\phi_\alpha{}^{\mu+1} \tag{9-1-15}$$

にした方が便利である．${}_*\phi_\alpha{}^\mu$ は第1類拘束なので，こうしても拘束条件全体は同等である．したがって ${}_*\dot{\varepsilon}^\alpha{}_\mu$ も次式に変わる．

$${}_*\dot{\varepsilon}^\alpha{}_\mu={}_*X_t{}_*\varepsilon^\alpha{}_\mu \tag{9-1-16}$$

こうして（9-1-13），（9-1-14 a），（9-1-16）より ${}_*\varepsilon^\alpha{}_\mu$ の漸化式

$${}_*\dot{\varepsilon}^\alpha{}_\mu+{}_*\varepsilon^\alpha{}_{\mu-l}+{}_*\varepsilon^\beta{}_m{}_*C_{\beta\mu}{}^\alpha=0\ \ (\mu=1,\cdots,m) \tag{9-1-17}$$

を得る．${}_*C_{\beta\mu}{}^\alpha$ は L あるいは H が与えられると定まっている量なので，${}_*\varepsilon^\alpha{}_\mu$ は ${}_*\varepsilon^\beta{}_m$ を与えれば（9-1-17）によって逐次解くことができる．それゆえ G（あるいは ${}_*\boldsymbol{X}_G$）は各ゲージ自由度 α に対して1つのゲージパラメータ関数 ${}_*\varepsilon^\alpha$（$\equiv{}_*\varepsilon^\alpha{}_m$）によってパラメータ化されることになる．すなわち，ゲージ自由度は1次第1類拘束の数 r である．

ところで，${}_*\varepsilon^\alpha{}_\mu$ を決定する式は（9-1-17）のみでなく，（9-1-14 b）との連立方程式であるから，${}_*\varepsilon^\alpha\equiv{}_*\varepsilon^\alpha{}_m$ を任意にとることはできない．しかし通常のゲージ理論の Lagrangian に対しては ${}_*\varepsilon^\alpha{}_m$ は時間 t（場の理論では x^μ）の任意関数 ${}_*\varepsilon^\alpha(t)$ の解を有する．要するに（9-1-14 b）

$${}_*\varepsilon^\beta{}_\mu\{{}_*\phi_\beta{}^\mu,{}_*\phi_\alpha{}^1\}+\{{}_*\varepsilon^\beta{}_\mu,{}_*\phi_\alpha{}^1\}{}_*\phi_\beta{}^\mu\equiv0 \qquad \mathrm{mod}\,({}_*\phi^1) \tag{9-1-18}$$

を満たす最も一般的な ${}_*\varepsilon^\beta{}_m={}_*\varepsilon^\beta$ を見い出し，それを（9-1-17）に用いればよいのであるが，（9-1-18）は t のみの関数 ${}_*\varepsilon^\alpha(t)$ では一般には満たされなく，q^i，p_j，t の関数（ただし t の任意関数を含む）でなければ解でない場合がある．（次の例 9-4 を参照）ここで注意すべきことは，たとえ ${}_*\varepsilon_\alpha$ が t のみの関数で q^i，p_j に依存しない解があっても，${}_*\varepsilon^\alpha{}_\mu$（$\mu<m$）は q^i あるいはさらに p_i にも依存する場合がある．これは（9-1-12）の ${}_*C_{\alpha\mu}{}^\beta$ にそのような依存性がある場合に起こる．（9-1-17）から逐次 ${}_*\varepsilon^\alpha{}_1$ を求めると ${}_*\varepsilon^\beta$ の時間微分は最高階 $d^{m-1}{}_*\varepsilon^\beta/dt^{m-1}$ まで現われるので，G も同様に ${}_*\varepsilon^\alpha$ の（$m-1$）階時間微分を含む．

次の問題は，では（9-1-17）と（9-1-18）を同時に満たす ${}_*\varepsilon^\alpha{}_\mu$ の組は常に存在するかということである．結論を先に述べると常に存在する．その証明は次節で示されるように，G は第1類拘束の1次結合で必ず表されることによってなされる．

Hamilton ベクトル場 ${}_*\boldsymbol{X}_G$ は次式で与えられる．

$${}_*\boldsymbol{X}_G={}_*\varepsilon^\alpha{}_\mu{}_*\boldsymbol{X}_{\phi_\alpha{}^\mu}+{}_*\phi_\alpha{}^\mu{}_*\boldsymbol{X}_{\varepsilon^\alpha{}_\mu} \tag{9-1-19}$$

${}_*\boldsymbol{X}_{\phi_\alpha{}^\mu}$ は第8章の記号では ${}_*Y_\alpha{}^\mu$ とも書かれたものである．

以上で

$$\delta_* q^i = \{q^i, G(\varepsilon)\},\quad \delta_* p_i = \{p_i, G(\varepsilon)\} \tag{9-1-20}$$

は位相空間における微少ゲージ変換であることを示した．

G が p_i の 2 次以上の項を含む場合，すなわち $\partial G/\partial p_i$ が p_i に依存する場合，(9-1-16) の $\delta_* q^i$，$\delta_* p_i$ に対して作用関数は必ずしも不変でない．これは，この $\delta_* p_i$ と速度位相空間での $\delta \xi^i$ との整合性が破れていることを示唆するものである．このことを調べるために，速度位相空間でのゲージ変換の生成子を議論しよう．

位相空間の $_*\boldsymbol{X}_G$ から速度位相空間の X_G への写像を求めよう．この写像が存在することは（9-1-14 b）によって保証されている．速度位相空間内での拘束 $\phi_\alpha{}^\mu$ に対する定常性の条件は，すでに（8-5-29）で与えておいた：

$$[X_t(u), Y_\alpha{}^\mu] = Y_\alpha{}^{\mu+1} \qquad (\phi_\alpha{}^2 \approx 0) \tag{9-1-21}$$

$$Y_\alpha{}^{m+1} = [X_t(u), Y_\alpha{}^m] = C_{\alpha 0}{}^\beta Z_\beta + C_{\alpha\mu}{}^\beta Y_\beta{}^\mu + \phi_\beta{}^\mu \boldsymbol{X}_{C_{\alpha\mu}{}^\beta}\ ;\ Z_\alpha = -\tau_\alpha{}^i \frac{\partial}{\partial \xi^i}$$

ここで

$$X_t(u) = \eta^i \frac{\partial}{\partial \xi^i} + \xi^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{\partial}{\partial t} + u^\alpha \tau_\alpha{}^i \frac{\partial}{\partial \xi^i}$$

で，u^α を変えても $X_t(u)$ はゲージ的には等価である．(8-5-29) では X_T であったが，$_*X_{H_T}$ を $_*X_H$ として G を求めたと同じ理由で，(9-1-21) では X_T の代りに $X_t(u)$ を用いた．(9-1-14 b) の条件によって，$_*\boldsymbol{X}_G \to X_G$ は存在する．(9-1-6) に対応する式は，$_*\boldsymbol{X}_{v\phi 1}$ の代りに $u^\alpha Z_\alpha$ がくるので

$$[X_G, Z_\alpha] = 0 \quad \mathrm{mod}\,(Z_\alpha) \tag{9-1-22}$$

を考慮すると*)

$$[X_G, X_t(u)] = \delta u^\alpha Z_\alpha \tag{9-1-23}$$

である．これから X_G の形は

$$X_G = \varepsilon^\alpha{}_0 Z_\alpha + X_{\varepsilon^\alpha{}_\mu \phi_\alpha{}^\mu} = \varepsilon^\alpha{}_0 Z_\alpha + \varepsilon^\alpha{}_\mu Y_\alpha{}^\mu + \phi_\alpha{}^\mu X_{\varepsilon^\alpha{}_\mu} \tag{9-1-24}$$

と書かれる．ただし $_*\boldsymbol{X}_{\varepsilon^\alpha{}_\mu} \to X_{\varepsilon^\alpha{}_\mu}$ の存在は仮定した．(9-1-23) は

$$[X_G, X_t(u)] \equiv 0 \qquad \mathrm{mod}\,(\mathrm{Z}_\alpha) \tag{9-1-23'}$$

と書くことができる．(9-1-23′) と (9-1-24) から $\varepsilon^\alpha{}_\mu$ に対する方程式として

$$\dot{\varepsilon}^\alpha{}_\mu + \varepsilon^\alpha{}_{\mu-1} + \varepsilon^\beta{}_m C_{\beta\mu}{}^\alpha = 0,\ (\mu = 1,\ \cdots,\ m) \tag{9-1-25}$$

---

*) (9-1-22) が成立することは，この式を位相空間に変換すれば $_*Z_\alpha = 0$ となることから明らかである．

ここで $\dot{\varepsilon}^{\alpha}{}_{\mu}=X_t(u)\varepsilon^{\alpha}{}_{\mu}$. 位相空間の場合と同じように，$\varepsilon^{\alpha}{}_{\mu}(\mu<m)$ は $\varepsilon^{\alpha}{}_{m}=\varepsilon^{\alpha}(t)$ と $C_{\beta\mu}{}^{\alpha}$ で表される.

速度位相空間での微小ゲージ変換は

$$\delta q^i=X_G q^i\ ;\ \delta\xi^i=X_G\xi^i \tag{9-1-26}$$

である. $\xi^i=\dot{q}^i$ からゲージ変換は $\delta\xi=\dfrac{d}{dt}\delta q^i$ を満たすべきであるが，上式の δq^i が ξ^i に依存する場合，すなわち，G が p_i の 2 次以上を含む場合には，これは満たされないことが，(9-1-23) を考慮して，次の関係式

$$X_G\xi^i=X_G X_t(u)q^i=(X_t(u)X_G+C^{\alpha}{}_{o}Z_{\alpha})q^i=X_t(u)X_G q^i=X_t(u)\delta q^i$$

からわかる. $X_t\delta q^i=\dfrac{d}{dt}\delta q^i$ は δq^i が ξ^i を含まないときにのみ無条件に成り立つ. $\dot{\xi}^i=X_t(u)\xi^i$ は運動方程式であるから，$\delta\xi^i=\dfrac{d}{dt}\delta q^i$ は δq^i が ξ^i を含むとき運動方程式のもとでのみ満たされる. ($X_t(u)q^i=\xi^i$ は運動学的な式で運動方程式ではない.) この場合，(9-1-26) の第 2 式，あるいはそれと同等な $\delta_* p_i(q,p)\equiv\{p_i,G\}$ と $\delta\xi^i=\dfrac{d}{dt}\delta q^i$ との整合性は運動方程式のもとでのみ成立する. この事情は位相空間での $\delta_* p_i$ と速度位相空間での $\delta p_i(q,\dot{q})$ とのずれにも存在する. 実際，位相空間でのゲージ変換は (9-1-20) で与えられているが，速度位相空間でのゲージ変換を

$$\delta q^i=X_G q^i\quad(=\{q^i,G\}=\partial G/\partial p_i)$$

$$\delta\xi^i=\frac{d}{dt}\delta q^i \tag{9-1-27}$$

と定義しても，δq^i が ξ^i を含んでいるとき，$\delta_* p_i$ と $\delta p_i(q,\dot{q})$ の間には差があることを以下で示す.

$$\begin{aligned}\delta p_i(q,\dot{q})&=\frac{\partial p_i}{\partial q^k}\delta q^k+\frac{\partial p_i}{\partial\dot{q}_k}\delta\dot{q}^k=\frac{\partial p_i}{\partial q^k}\frac{\partial G}{\partial p_k}+A_{ik}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial G}{\partial p_k}\right)\\&=A_{ik}\frac{\partial^2 G}{\partial p_l\partial p_k}\left(\dot{p}_l-\frac{\partial L}{\partial q^l}\right)+A_{ik}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial p_l\partial p_k}\frac{\partial L}{\partial q^l}+\frac{\partial^2 G}{\partial q^l\partial p_k}\dot{q}^l+\frac{\partial^2 G}{\partial t\,\partial p_k}\right)\\&\quad+\frac{\partial p_i}{\partial q^k}\frac{\partial G}{\partial p_k}\end{aligned}$$

右辺第 2 項は $A_{ik}\dfrac{\partial}{\partial p_k}=\dfrac{\partial}{\partial\dot{q}^i}$ を用いて変形すると

$$\text{第 2 項}=\frac{\partial}{\partial\dot{q}^i}\left(\frac{\partial G}{\partial p^l}\frac{\partial L}{\partial q_l}+\frac{\partial G}{\partial q^l}\dot{q}^l+\frac{\partial G}{\partial t}\right)-\frac{\partial G}{\partial p_l}\frac{\partial p_i}{\partial q^l}-\frac{\partial G}{\partial q^i}$$

となる. さらにこの第 1 項は (8-5-9) を用いると $\{G,H\}+\partial G/\partial t$ となるから，(9-1-14) で $\phi_{\alpha}{}^1\equiv 0$ を考慮すると，速度位相空間で 0 となることがわかり，結局

$$\delta p_i(q,\dot{q})-\delta_* p_i=A_{ik}\frac{\partial^2 G}{\partial p_k\partial p_l}\left(\dot{p}_l-\frac{\partial L}{\partial q^l}\right) \tag{9-1-28}$$

となり，運動方程式のもとでのみ一致する. (例 9-2 参照).

以上の事情から，速度位相空間でのゲージ変換の本来の定義（9-1-26）のもとでは運動方程式は常に不変であるが，Lagrangian は準不変*)とは限らぬ．しかしながらゲージ変換を（9-1-27）とすればLagrangian は準不変であることを以下で示そう．δL は

$$\delta L=\frac{\partial L}{\partial \xi^i}\delta\xi^i+\frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i=p_i\frac{d}{dt}\delta q^i+\frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i$$

$$=\frac{d}{dt}(p_i\delta q^i)-\left(\dot{p}_i-\frac{\partial L}{\partial q^i}\right)\frac{\partial G}{\partial p_i}$$

$$=\frac{d}{dt}(p_i\delta q^i-G)+\frac{\partial G}{{}_*\partial q^i}\xi^i+\frac{\partial G}{\partial p_i}\,\frac{\partial L}{\partial q^i}+\frac{\partial G}{\partial t}$$

と書ける．これを位相空間に移って考えることにする．（8-5-9）の $\partial L/\partial q^i=-\partial H/{}_*\partial q^i$ を用いると

$$\delta L=\frac{d}{dt}(p_i\delta q^i-G)+\{G,H\}+\frac{\partial G}{\partial t}=\frac{d}{dt}(p_i\delta q^i-G)-{}_*\varepsilon^{\alpha}{}_{0*}\phi_{\alpha}{}^1$$

である．速度位相空間に再びもどると，$\phi_\alpha{}^1\equiv 0$ であるから次式を得る．

$$\delta L=\frac{d}{dt}(p_i\delta q^i-G)=\frac{d}{dt}\left(p_i\frac{\partial G}{\partial p_i}-G\right) \tag{9-1-29}$$

よってLagrangian は（9-1-27）に対して準不変である．Noether の定理（2-4-11）

$$\delta L=\frac{d}{dt}(p_i\delta q^i)+\left(\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\delta q^i$$

と（9-1-29）とから，当然の帰結ながら，運動方程式のもとで

$$\frac{d}{dt}G=0 \tag{9-1-30}$$

となり，G は保存量である．

$\delta L=dF/dt$ とおいて（これは§9-2の（9-2-35）式との関連で）

$$F=p_i\frac{\partial G}{\partial p_i}-G \tag{9-1-31}$$

は，G が p_i の斉1次式の場合は $\delta L=0$（$F=0$）であることを示している．G が p_i の1次以外の項を含む場合，たとえば2次の項を含む重力場，弦模型では，$F\neq 0$ である．

以上を要約すると，ゲージ変換の生成子は，位相空間でも速度位相空間でも

---

*) $\delta L=dF/dt$（場の理論では $\partial_\mu F^\mu(x)$）で $F\neq 0$ のとき準不変という．

(9-1-14) の 2 式により機械的に求められる．速度位相空間と位相空間での定式化の整合性から $F=p_i(\partial G/\partial p_i)-G$ も得られることがわかった．

最後にわれわれの G が一意的なものかどうかという疑問が残る．このため

$$\delta q^i=\overset{(\mu)}{\varepsilon}{}^{\alpha} g^i{}_{\alpha\mu}(q,\dot{q}) \quad ; \quad \overset{(\mu)}{\varepsilon}{}_{\alpha}=\frac{d^\mu}{dt^\mu}\varepsilon^\alpha(t) \tag{9-1-32}$$

に対して，L の変化が

$$\delta L=\frac{d}{dt}\left(\overset{(\mu)}{\varepsilon}{}^{\alpha} f_{\alpha\mu}(q,\dot{q})\right) \qquad (\mu=0,\cdots,\mathrm{m}) \tag{9-1-33}$$

として，$g^i{}_{\alpha\mu}$, $f_{\alpha\mu}$ の間の関係を，§ 2-5 の方法を一般化して求めてみても，本質的にはわれわれの G でつくされていることが次節でわかる．(§ 9-2 参照)

第 1 類拘束条件と第 2 類拘束条件とが共存する場合は面倒である．しかし，(9-1-12) に現れる ${}_*\phi_\alpha{}^\mu$ の系列が第 1 類と第 2 類に完全に分離するならば*)，第 1 類拘束条件のみで (9-1-14) を満たす G をつくれば，その G はゲージ変換の生成子である．

第 1 類拘束のみが現れるとし，ゲージ自由度の数を勘定するとき，拘束条件の間に次のような線形的に関係づけられた L 個の恒等式

$$\sigma^{(l)}{}_\mu{}^\alpha {}_*\phi_\alpha{}^\mu=0 \qquad (l=1,\cdots,L) \tag{9-1-34}$$

があるときは注意が必要である．このように拘束条件が一次従属な場合を縮減可能な系と呼ぼう [2]．上の式に対しても (9-1-14 a) のような定常条件式が満たされているとする．(9-1-34) を特別な拘束について解かず，そのままの形でまとめて扱うのが合理的である．

微小ゲージ変換の生成子 $G={}_*\varepsilon^\alpha{}_\mu {}_*\phi_\alpha{}^\mu$ に対し，その定常条件式 (9-1-14 a) は

$$\dot{G}={}_*\varepsilon^\alpha{}_\mu {}_*\phi_\alpha{}^{\mu+1}+{}_*\dot{\varepsilon}^\alpha{}_\mu {}_*\phi_\alpha{}^\mu+{}_*\varepsilon^\alpha{}_m C_{\alpha\mu}{}^\beta {}_*\phi_\beta{}^\mu=0 \quad \mathrm{mod}\,({}_*\phi_\alpha{}^1)$$

各拘束条件は独立とし，Lagrange の未定係数 λ_l を導入すると次の漸化式

$${}_*\varepsilon^\alpha{}_{\mu-l}+{}_*\dot{\varepsilon}^\alpha{}_\mu+{}_*\varepsilon^\beta{}_m C_{\beta\mu}{}^\alpha+\lambda_l\sigma^{(l)}{}_\mu{}^\alpha=0 \tag{9-1-35}$$

を得る．この式から ${}_*\varepsilon^\alpha{}_\mu$ $(1\leq\mu\leq m-1)$ はゲージ関数 $\varepsilon^\alpha(t)={}_*\varepsilon^\alpha{}_m$ と λ_l で表わされる．よって，$G(\varepsilon)$ は r 個の $\varepsilon^\alpha(t)$ $(\alpha=1,\cdots,r)$ と L 個の λ_l $(l=1,\cdots,L)$，合計 $(r+L)$ 個の関数でパラメータ化される．しかるに $G(\varepsilon)$ の真の自由度の数は $(r+L)$ でなく r である．このギャップは，$G(\varepsilon)$ に次のような L 個の恒等式による制限が入るためである．

*) 一般の場合の議論は § 9-4 を参照されたい．

$$G(\varepsilon^{\alpha}{}_{\mu}=\sigma^{(l)}{}_{\mu}{}^{\alpha})=\sigma^{(l)}{}_{\mu}{}^{\alpha}\phi_{\alpha}{}^{\mu}=0 \quad (l=1,\cdots,L) \tag{9-1-36}$$

すなわち，$G(\varepsilon)$ の中の L 個のゲージ自由度は見掛上のものに過ぎない．以下，このことを2階反対称テンソルゲージ場 $A_{\mu\nu}$ の場合について示そう．

この系の Lagrange 関数として次のものから出発する．

$$L=\frac{1}{12}F_{\lambda\mu\nu}F^{\lambda\mu\nu} \quad ; \quad F_{\lambda\mu\nu}=\partial_{\lambda}A_{\mu\nu}+\partial_{\mu}A_{\nu\lambda}+\partial_{\nu}A_{\lambda\mu} \tag{9-1-37}$$

$A_{\mu\nu}$ に対する正準運動量*) と1次拘束条件式は

$$\pi^{\mu\nu}=\frac{\partial L}{\partial\dot{A}_{\mu\nu}}=\frac{1}{2}F^{0\mu\nu}\,;\ {}_{*}\phi_{a}{}^{1}=\pi^{0a}\approx 0 \quad (a=1,2,3) \tag{9-1-38}$$

全 Hamiltonian は

$$H_{T}=\int d^{3}x\ \left[\pi^{ab}\pi_{ab}+2\pi^{ab}\partial_{a}A_{ob}-\frac{1}{12}F_{abc}F^{abc}+v_{a}\pi^{oa}\right] \tag{9-1-39}$$

2次拘束として

$$ {}_{*}\phi_{a}{}^{2}=\{{}_{*}\phi_{a}{}^{1},H_{T}\}=2\partial_{b}\pi^{ba}\approx 0 \tag{9-1-40}$$

これ以上拘束条件は現れない．π^{ba} は反対称なので恒等式　$\partial_{a}\partial_{b}\pi^{ab}=0$　が成立するので，縮減可能な場合に当たる．

ゲージ変換の生成子　$G(\varepsilon)=\int d^{3}x\,({}_{*}\varepsilon^{a}{}_{1*}\phi_{a}{}^{1}+{}_{*}\varepsilon^{a}{}_{2*}\phi_{a}{}^{2})$ の定常条件式

$$\dot{G}(\varepsilon)=\int d^{3}x\,({}_{*}\dot{\varepsilon}^{a}{}_{1*}\phi_{a}{}^{1}+{}_{*}\varepsilon^{a}{}_{1*}\phi_{a}{}^{2}+{}_{*}\dot{\varepsilon}^{a}{}_{2*}\phi_{a}{}^{2})\ \bmod({}_{*}\phi_{a}{}^{1})$$

に縮減可能な関係式　$\partial^{a}{}_{*}\phi_{a}{}^{2}=0$ を未定係数 $\varepsilon(x)$ を用いて，結びつけると

$$\int d^{3}x\,({}_{*}\varepsilon^{a}{}_{1}+{}_{*}\dot{\varepsilon}^{a}{}_{2}+\varepsilon\partial^{a})\,{}_{*}\phi_{a}{}^{2}=0 \tag{9-1-41}$$

これから

$$ {}_{*}\varepsilon^{a}{}_{1}+{}_{*}\dot{\varepsilon}^{a}{}_{2}-\partial^{a}\varepsilon=0 \tag{9-1-42}$$

ここで ${}_{*}\varepsilon^{a}{}_{2}=-\varepsilon_{a}$，$\varepsilon=-\varepsilon_{o}$ とおくと，${}_{*}\varepsilon^{a}{}_{1}=-\ (\partial_{a}\varepsilon_{o}-\partial_{o}\varepsilon_{a})$ となり，$G(\varepsilon)$ は

$$G(\varepsilon)=\int d^{3}x\ \pi^{\nu}\ (\partial_{\mu}\varepsilon_{\nu}-\partial_{\nu}\varepsilon_{\mu}) \tag{9-1-42}$$

となる．これから $\delta A_{\mu\nu}=\{A_{\mu\nu},\,G\}=(\partial_{\mu}\varepsilon_{\nu}-\partial_{\nu}\varepsilon_{\mu})$，$\delta\pi^{\mu\nu}=\{\pi^{\mu\nu},\,G\}=0$ となる．このゲージ変換は4個のゲージ関数 $\varepsilon_{\mu}(x)$ を含んでいるが　$\partial^{a}{}_{*}\phi_{a}{}^{2}=0$　に対応して

$$G(\varepsilon_{\mu}=\partial_{\mu}\varepsilon)=0 \tag{9-1-43}$$

---

*)　同時刻の $P.\ b.$ として $\{A_{\mu\nu}(\boldsymbol{x}),\ \pi^{\lambda\rho}(\boldsymbol{x}')\}=\frac{1}{2}\ (\delta^{\lambda}{}_{\mu}\delta^{\rho}{}_{\nu}-\delta^{\lambda}{}_{\nu}\delta^{\rho}{}_{\mu})\ \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$ をとる．

が成立し，真のゲージ自由度は 3 個である．

本節を終えるにあたって，第 2 章の§ 2-4 で保留しておいた Noether の定理の逆について言及しておこう．これは，1 つの保存則があれば，それに対応して，作用関数を不変にする変換が存在するかどうかという問題である．作用積分の不変性を示す（9-1-29）の導き方を見ると，G は

$$\frac{\partial G}{\partial t}+\{G, H\}\equiv 0 \quad \mathrm{mod}\,({}_*\phi^1),\quad \{G, {}_*\phi_\alpha{}^1\}\equiv 0 \quad \mathrm{mod}\,({}_*\phi^1)$$

だけ満たしておればよい．つまり，運動の保存量であれば，ゲージ変換の生成子でなくてもよいことがわかる．したがって，運動方程式の第 1 積分として保存量

$$\phi(q, p)=\text{一定}$$

が求まり，それが

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\phi}{\partial t}+\{\phi, H\}\equiv 0 \quad \mathrm{mod}\,({}_*\phi^1)\\&\{\phi, \phi_\alpha{}^1\}\equiv 0 \qquad\quad\ \mathrm{mod}\,({}_*\phi^1)\end{aligned}\right\} \tag{9-1-44}$$

を満たせば，ϕ を生成子とする変分

$$\delta q^i=\{q^i, \phi\},\quad \delta\xi^i=\frac{d}{dt}\delta q^i \tag{9-1-45}$$

に対して作用積分は不変である．これが Noether の定理の逆定理である．ただし第 1 積分は運動方程式のもとでの保存量である．さらに拘束条件のある場合，保存則は弱等式として成り立つから，2 次拘束条件があるとき，保存量は常に（9-1-44）を満たすとは限らないことに注意すべきである．

これに対して，拘束条件のない正則な Lagrange 関数の場合，$\phi_\alpha{}^1$ は存在しないので，（9-1-44）の第 1 式さえ満たされるならば，すべての保存量に対し，Noether の定理の逆定理が成立する．この場合でも，δL は

$$\delta L=\frac{d}{dt}\left(p_i\frac{\partial\phi}{\partial p_i}-\phi\right) \tag{9-1-46}$$

で与えられる．

例 9-1

3 次元空間で次の Lagrangian を考える．

$$L=\xi^1\xi^2-q^1q^3$$

拘束条件式は，${}_*\phi^1=p_3$；${}_*\phi^2=-q^1$；${}_*\phi^3=-p_2$；${}_*\phi^4=0$（$C_{\beta\mu}{}^\alpha=0$）；また $p_1=\xi^2$，$p_2=\xi^1$

位相空間：

$$H_T=p_1p_2+q^1q^3+vp_3$$

$G={}_*\varepsilon_\mu {}_*\phi^\mu$ を定める式は ${}_*\dot{\varepsilon}_\mu+{}_*\varepsilon_{\mu-1}=0$ なので ${}_*\varepsilon_2=-{}_*\dot{\varepsilon}_3=-\dot{\varepsilon}$, ${}_*\varepsilon_1=\ddot{\varepsilon}$,

$$G=\ddot{\varepsilon}p_3+\dot{\varepsilon}q^1-\varepsilon p_2 \ ; \ {}_*X_G=\ddot{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial q^3}-\dot{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial p_1}-\varepsilon\frac{\partial}{\partial q^2}$$

したがって

$$\delta{}_*q^2=-\varepsilon \ ; \ \delta{}_*p_1=-\dot{\varepsilon} \ (\text{これは}\ \delta\xi^2=-\dot{\varepsilon}) \ ; \ \delta{}_*q^3=\ddot{\varepsilon}.$$

速度位相空間：

$$X_T(v=0)=-q^3\frac{\partial}{\partial\xi^2}+\xi^i\frac{\partial}{\partial q^i}+u\frac{\partial}{\partial\xi^3}+\frac{\partial}{\partial t}$$

$$Z=-\frac{\partial}{\partial\xi^3} \ ; \ Y^1=\frac{\partial}{\partial q^3} \ ; \ Y^2=\frac{\partial}{\partial\xi^2} \ ; \ Y^3=-\frac{\partial}{\partial q^2}$$

となり，X_G は

$$X_G=\dddot{\varepsilon}Z+\ddot{\varepsilon}Y^1-\dot{\varepsilon}Y^2+\varepsilon Y^3$$

で与えられ，${}_*X_G$ の写像になっている．この X_G を用いると

$$\delta L=X_G L=-\frac{d}{dt}(\dot{\varepsilon}q^1) \quad \text{これから} \quad F=-\dot{\varepsilon}q^1$$

一方，$F=p_i(\partial G/\partial p_i)-G=-\dot{\varepsilon}q^1$ なので，両空間での対応が整合的である．

例 9-2

δq^i が p_i に依存する簡単な例として次の Lagrange 関数を考える

$$L=\frac{1}{2}\frac{(\dot{q}^2+q^3)^2}{1-q^1}+\frac{1}{2}\frac{(\dot{q}^3+q^2)^2}{1+q^1}$$

正準運動量および Hamiltonian は

$$p_1=0 \ ; \ p_2=\frac{\dot{q}^2+q^3}{1-q^1} \ ; \ p_3=\frac{\dot{q}^3+q^2}{1+q^1} \tag{a}$$

$$H=\frac{1}{2}(p_2{}^2+p_3{}^2)-\frac{1}{2}q^1(p_2{}^2-p_3{}^2)\ -q^2p_3-q^3p_2$$

拘束条件式は

$${}_*\phi^1=p_1\approx 0 \ ; \ {}_*\phi^2=\frac{1}{2}(p_2{}^2-p_3{}^2)\approx 0 \ ; \ {}_*\dot{\phi}^2=0$$

(9-1-17) より ${}_*\varepsilon^\alpha{}_\mu$ を求め G をつくると

$$G=-\dot{\varepsilon}p_1+\varepsilon(p_2{}^2-p_3{}^2)/2$$

これより

$$\delta_* q^1 = -\dot{\varepsilon}\ ;\ \delta_* q^2 = \varepsilon p_2\ ;\ \delta_* q^3 = -\varepsilon p_3 \tag{b}$$

ここで

$$\delta\xi^i = \frac{d}{dt}\delta q^i \tag{c}$$

とおくと

$$\delta L = \frac{1}{2}\dot{\varepsilon}(p_2{}^2 - p_3{}^2) + \varepsilon(p_2\dot{p}_2 - p_3\dot{p}_3) = \frac{d}{dt}\left\{\frac{\varepsilon}{2}(p_2{}^2 - p_3{}^2)\right\}$$

となり Lagrangian は準不変となる．(a), (b), (c)より δp_i を求めると

$$\delta p_1 = 0\ ;\ \delta p_2 = \frac{\varepsilon(\dot{p}_2 - p_3)}{1 - q^1}\ ;\ \delta p_3 = \frac{\varepsilon(p_2 - \dot{p}_3)}{1 + q^1} \tag{d}$$

一方，上の G より $\delta_* p_i$ を求めると

$$\delta_* p_i = 0$$

これを(d)の δp_i と比べると，運動方程式　$\dot{p}_2 = p_3\ ;\ \dot{p}_3 = p_2$　を用いたときにのみ整合性があり，(9-1-28) が成立していることがわかる．

例 9-3　Yang-Mills 場

$$L = -\frac{1}{4}F^a{}_{\mu\nu}F_a{}^{\mu\nu}\ ;\ F^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a{}_\nu - \partial_\nu A^a{}_\mu + gf^a{}_{bc}A^b{}_\mu A^c{}_\nu$$

ここで構造定数 $f^a{}_{bc}$ は完全反対称で次の関係式を満たす．

$$f^a{}_{bc}f^c{}_{de} + f^a{}_{dc}f^c{}_{eb} + f^a{}_{ec}f^c{}_{bd} = 0$$

Hessian 行列と $\tau^a{}_{\alpha\mu}$ は

$$A^{\mu\nu}{}_{ab} = \delta_{ab}(\eta^{\mu o}\eta^{\nu o} - \eta^{\mu\nu})\ ;\ \tau^a{}_{\alpha\mu} = \delta^a{}_\alpha\eta_{\mu o}$$

運動の生成子は§8-4 によって

$$X_t(u) = \frac{\partial}{\partial t} + \int d^3\boldsymbol{x}\left[(\eta^a{}_\mu + u^a\eta_{\mu o})\frac{\delta}{\delta\xi^a{}_\mu} + \xi^a{}_\mu\frac{\delta}{\delta A^a{}_\mu}\right]$$

となる．$\eta^a{}_\mu$ は (8-4-12) の η^i である．ここで $\eta^b{}_\nu$ は次式

$$A^{\mu\nu}{}_{ab}\eta^b{}_\nu \approx \frac{\partial L}{\partial A^a{}_\mu} - \partial_i\frac{\partial L}{\partial(\partial_i A^a{}_\mu)} - \left(\frac{\partial\pi^\mu{}_a}{\partial A^b{}_\nu} - \partial_i\frac{\partial\pi^\mu{}_a}{\partial(\partial_i A^b{}_\nu)}\right)\xi^b{}_\nu$$

$$= \eta^{\mu i}(\partial^o D^a{}_{bi}A^b{}_o + gf^a{}_{bc}A^b{}_o F^{co}{}_i - D^a{}_{bj}F^{bj}{}_i) - \eta^{\mu o}D^a{}_{bi}F^{bi}{}_o$$

を満たす．ただし

$$D^a{}_{b\mu} = \delta^b{}_a\partial_\mu - gf^a{}_{bc}A^c{}_\mu$$

上式の右辺に $\tau^a{}_{\alpha\mu}$ を掛けると弱い意味で 0 になるなら $\eta^b{}_\nu$ は存在する．よって

$$\phi_\alpha{}^2 = D^a{}_{bi}F^{bi}{}_o = D^a{}_{bi}\pi^i{}_b \approx 0$$

定常条件は $X_t(u)\phi_a{}^2=-f^a{}_{bc}A^b{}_o\phi_c{}^2\approx 0$，したがってこれ以上の拘束条件は現れない．運動の生成系は X_t 以外に

$$Z_a=-\frac{\delta}{\delta\xi^a{}_o}$$

$$Y_a{}^1=[X_t(u),Z_a]=\frac{\delta}{\delta A^a{}_o}-D^a{}_{bi}\frac{\delta}{\delta\xi^b{}_i}$$

$$Y_a{}^2=[X_t(u),Y_a{}^1]=D^a{}_{bi}\frac{\delta}{\delta A^b{}_i}-g f^c{}_{bd}(\delta^d{}_a\xi^b{}_i+A^b{}_oD^a{}_{di})\frac{\delta}{\delta\xi^c{}_i}$$

$$Y_a{}^3=-f^a{}_{bc}A^b{}_o\mathrm{Y}_c{}^2$$

ゲージ変換の生成子は

$$X_G=\int d^3x\,(\varepsilon^a{}_oZ_a+\varepsilon^a{}_lY_a{}^1+\varepsilon^a{}_2Y_a{}^2)$$

ここで $\varepsilon^a{}_\mu$ を定める式は

$$\varepsilon^a{}_o+\dot{\varepsilon}^a{}_1=0\ ;\ \varepsilon^a{}_1+\dot{\varepsilon}^a{}_2+f^a{}_{bc}A^b{}_o\varepsilon^c{}_2=0$$

$\varepsilon^a{}_2(x)=-\varepsilon^a(x)$ とおき $\varepsilon^a{}_\mu$ を求めると

$$X_G=\int d^3x\left[D^a{}_{b\mu}\varepsilon^b(x)\frac{\delta}{\delta A^a{}_\mu(x)}+\partial_o(D^a{}_{b\mu}\varepsilon^b(x))\frac{\delta}{\delta\xi^a{}_\mu(x)}\right]$$

位相空間に移ると

$$_*X_T=\frac{\partial}{\partial t}+\int d^3x\left[\frac{\partial H_T}{\partial\pi^\mu{}_a}\frac{\delta}{_*\delta A^a{}_\mu}-\frac{\partial H_T}{_*\partial A^a{}_\mu}\frac{\delta}{\delta\pi^\mu{}_a}\right]$$

ここで

$$H_T=-\frac{1}{2}\pi^i{}_a\pi^a{}_i-A^a{}_oD^a{}_{bi}\pi^i{}_b+\frac{1}{4}F^a{}_{ij}F_a{}^{ij}+v^a\pi_a{}^o$$

拘束条件は

$$_*\phi_a{}^1=\pi_a{}^o\ ;\ _*\phi_a{}^2=D^a{}_{bi}\pi_b{}^i$$

ゲージ変換の生成子は

$$G=\int d^3x\,[_*\varepsilon^a{}_1{}_*\phi_a{}^1+{}_*\varepsilon^a{}_2{}_*\phi_a{}^2]=\int d^3x\,\pi_a{}^\mu D^a{}_{b\mu}\varepsilon^b(x).$$

$_*\phi_a{}^1$，$_*\phi_a{}^2$ は共変的ではないが G は共変的で，これから $\delta A^a{}_\mu=D^a{}_{b\mu}\varepsilon^b(x)$ が導かれる．

例 9-4　ε^α が q，p に依存する模型

G の定常条件（9-1-14）の解 ${}_*\varepsilon^\alpha{}_m = {}_*\varepsilon^\alpha$ が t のみでなく q^i に依存するモデル Lagrangian を示す [3]．このモデルはいくつかの点で重力理論と類似している．

$$L=\frac{1}{2}g_{ij}(q)\,\dot{q}^i\dot{q}^j-\frac{c}{(q)^2}$$

ここに c は定数で

$$g_{ij}(q)=\delta_{ij}-q^iq^j/(q)^2,\quad (q)^2=\sum_{i=1}^{N}q^iq^i$$

である．g_{ij} のランクは $N-1$ で，正準運動量は

$$p_i=g_{ij}\dot{q}^j$$

である．よって 1 次拘束条件は 1 つで

$${}_*\phi^1=p_iq^i=(pq)\approx 0$$

$\sum_{j=1}^{N}g_{ij}g_{jk}=g_{ik}$ より $(p)^2\equiv\sum_{j=1}^{N}p_ip_i=p_i\dot{q}^i=g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j$ を考慮すると正準 Hamiltonian は

$$H=\frac{1}{2}(p)^2+\frac{c}{(q)^2}$$

となる．2 次拘束は

$${}_*\phi^2=\{{}_*\phi^1,H\}=(p)^2+\frac{2c}{(q)^2}=2H$$

これ以上拘束条件は生じない．

ゲージ変換の生成子は

$$G={}_*\varepsilon_1{}_*\phi^1+{}_*\varepsilon_2{}_*\phi^2$$

であり，定常条件（9-1-17）は

$${}_*\varepsilon_1+{}_*\dot{\varepsilon}_2=0$$

一方，（9-1-14b）は

$$\{G,{}_*\phi^1\}=\{{}_*\varepsilon_2{}_*\phi^2,{}_*\phi^1\}=(-2{}_*\varepsilon_2+\{{}_*\varepsilon_2,(pq)\}){}_*\phi^2=0\quad \mathrm{mod}\,({}_*\phi^1)$$

となる．${}_*\varepsilon_2$ が t のみの関数ではこの条件は満たされないことは明らかである．上の条件を満たす解として，$\varepsilon(t)$，$\zeta(t)$　を t の任意関数として

$${}_*\varepsilon_2=\varepsilon(t)\,(q)^2+\zeta(t)\,(p)^{-2}$$

が得られるが，最も簡単な解として

$${}_*\varepsilon_2=\varepsilon(t)\,(q)^2$$

をとれば充分である*)．すると

*）$\zeta(t)\neq 0$ の場合はさらに広いゲージ変換を与える G が得られる．

$$ {}_*\varepsilon_1 = -{}_*\dot{\varepsilon}_2 = -\dot{\varepsilon}(q)^2 - \varepsilon\{(q)^2, H\} = -\dot{\varepsilon}(q)^2 - 2(pq)\varepsilon $$

となり，G として

$$ G = (q)^2[-\dot{\varepsilon}(t)\,{}_*\phi^1 + \varepsilon(t)\,{}_*\phi^2] $$

を得る．ただし $({}_*\phi^1)^2$ 項は落した．

§ 9-2　ゲージ変換の生成子はすべて第１類拘束の１次結合で表されること

ここでは特異 Lagrangian がゲージ変換で準不変であるとき，そのゲージ変換の生成子 G は第１類拘束の１次結合で表されることを示す．この結果は，G の満たすべき条件（9-1-14）は任意関数を含む解を常に持つことの証明でもある．

今 Lagrangian $L(q, \dot{q})$ が微小変換*）

$$ \delta q^i = \sum_{\mu=0}^{m-1} (D^\mu \varepsilon^\alpha(t))\, g^i{}_{\alpha\mu}(q, \dot{q}), \qquad (D^\mu = d^\mu/dt^\mu) \qquad (i = 1, \cdots, N) \tag{9-2-1} $$

に対して準不変であるとする．$\varepsilon^\alpha(t)$ は任意関数，$g^i{}_{\alpha\mu}(q, \dot{q})$ は L によって定まったある関数であり，最高階の $g^i{}_{\alpha m-1}$ は α ごとに独立とする．このゲージ変換は ε^α の $m-1$ 階微分まで含むが，力学変数 q^i は速度 $\dot{q}^i$ までで，加速度にはよらないことに注意されたい．

仮定により，この変換に対して

$$ \delta L = \frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta \dot{q}^i = DF(q, \dot{q}, \varepsilon) \qquad (D = d/dt) \tag{9-2-2} $$

ここに F は L と δq^i の形に依存して定まる関数である．オイラー微分

$$ [L]_i \equiv \frac{\partial L}{\partial q^i} - D\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial L}{\partial q^i} - Dp_i \tag{9-2-3} $$

を用いて，（9-2-2）は次のように表される．ただし $p_i = \partial L / \partial \dot{q}^i$ とおいた．

$$ \delta L = [L]_i\, \delta q^i + D(p_i \delta q^i) = DF. \tag{9-2-4} $$

F は（9-2-1）と（9-2-2）からわかるように

$$ F = \sum_{\mu=0}^{m-1} (D^\mu \varepsilon^\alpha(q))\, f_{\alpha\mu}(q, \dot{q}) \tag{9-2-5} $$

と展開される．ここで，（9-2-1）と（9-2-2）を（9-2-4）に代入して

$$ I \equiv \delta L - DF = \sum_{\mu=0}^{m-1} \{[L]_i (D^\mu \varepsilon^\alpha) g^i{}_{\alpha\mu} + D[(D^\mu \varepsilon^\alpha)\Psi_{\alpha\mu}]\} \equiv 0 \tag{9-2-6} $$

$$ \Psi_{\alpha\mu} \equiv p_i g^i{}_{\alpha\mu} - f_{\alpha\mu} \tag{9-2-7} $$

---

*）m は α ごとに異なってよいが，簡単化のために同じとする．

を得る．この右辺{　}の中の第1項の D^{μ} を部分積分により逐次 $[L]_i g^i{}_{\alpha\mu}$ に移すと

$$I=\sum_{\mu=0}^{m-1}(-1)^{\mu}\varepsilon^{\alpha}D^{\mu}([L]_i g^i{}_{\alpha\mu})+\sum_{\mu=0}^{m-1}D\{(D^{\mu}\varepsilon^{\alpha})\Psi_{\alpha\mu}-\sum_{s=1}^{\mu}(-1)^{s}(D^{\mu-s}\varepsilon^{\alpha})D^{s-1}([L]_i g^i{}_{\alpha\mu})\}$$

となる． (9-2-8)

Lagrangian が準不変であるならば

$$\int_{t_1}^{t_2}dt\,I\equiv 0 \tag{9-2-9}$$

が成立する．ここで，$\varepsilon^{\alpha}(t)$ は任意関数であるから，境界 t_l，t_2 においてすべての μ に対して

$$D^{\mu}\varepsilon^{\alpha}(t_1)=D^{\mu}\varepsilon^{\alpha}(t_2)=0 \tag{9-2-10}$$

となるように ε^{α} を選ぶことができる．すると（9-2-8）を（9-2-9）に代入した式で第2項の{　}は消え，第1項のみ残るようにできる．その式で積分領域 $[t_1, t_2]$ は任意であるから，結局，次の恒等式を得る．

$$\sum_{\mu=0}^{m-1}(-1)^{\mu}D^{\mu}([L]_i g^i{}_{\alpha\mu})\equiv 0 \tag{9-2-11}$$

この式を（9-2-8）に代入すると，今度は第2項が0となる：

$$\sum_{\mu=0}^{m-1}D\{(D^{\mu}\varepsilon^{\alpha})\Psi_{\alpha\mu}-\sum_{s=1}^{\mu}(-1)^{s}(D^{\mu-s}\varepsilon^{\alpha})D^{s-1}([L]_i g^i{}_{\alpha\mu})\}\equiv 0 \tag{9-2-12}$$

ここで再び ε^{α} が任意関数であることを考慮すると，$D^{\mu}\varepsilon^{\alpha}$ のすべての μ に対して，それぞれの係数が恒等的に0でなければならないことになる．よって

$$\Psi_{\alpha m-1}\equiv 0 \tag{9-2-13}$$

$$\Psi_{\alpha\mu}+D\Psi_{\alpha\mu+1}+[L]_i g^i{}_{\alpha\mu+1}\equiv 0,\qquad (\mu=0,\ \cdots,\ m-2) \tag{9-2-14}$$

$$D\Psi_{\alpha 0}-\sum_{\mu=1}^{m-1}(-1)^{\mu}D^{\mu}([L]_i g^i{}_{\alpha\mu})\equiv 0 \tag{9-2-15}$$

さらに，（9-2-11）を用いると，（9-2-15）は

$$D\Psi_{\alpha 0}+[L]_i g^i{}_{\alpha m-1}\equiv 0 \tag{9-2-16}$$

となる．これら恒等式がゲージ変換（9-2-1）の帰結である．

ここで（9-2-14）で $\mu=m-2$ とおくと

$$\Psi_{\alpha m-2}+[L]_i g^i{}_{\alpha m-1}\equiv 0 \tag{9-2-17}$$

しかるに，$\Psi_{\alpha\mu}$ は δq^i と F の定義（9-2-1），（9-2-5）により $\ddot{q}^i$ によらず q^i，$\dot{q}^i$ のみの関数である：

$$\Psi_{\alpha\mu}=p_i(q,\dot{q})g^i{}_{\alpha\mu}(q,\dot{q})-f_{\alpha\mu}(q,\dot{q})$$

したがって，(9-2-17) において，$\ddot{q}^i$ は $[L]_i$ のみに含まれる，すなわち (9-2-3) により

$$[L]_i=\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{\partial p_i}{\partial q^j}\dot{q}^j-A_{ij}\ddot{q}^j \tag{9-2-18}$$

ここに A_{ij} は Hessian 行列である．すると (9-2-17) の中の $\ddot{q}^i$ の係数は恒等的に消えねばならないから

$$A_{ij}g^i{}_{\alpha m-1}\equiv 0 \quad (\alpha=1,\cdots,r) \tag{9-2-19}$$

上式は $g^i{}_{\alpha m-1}$ が A_{ij} の核（固有値 0 ベクトル）であることを示し，A_{ij} の階数は高だか $N-r$ であることになる．$g^i{}_{\alpha m-1}$ はすべての α に対して独立ベクトル（i について N 次元ベクトル）であると仮定し*)，ゲージ変換と無関係な第 2 類拘束が他にないならば A_{ij} の階数はちょうど $N-r$ である．よって，L は特異であり，r 個の 1 次拘束条件

$${}_*\phi_\alpha{}^1(q,p)\equiv 0 \quad (\alpha=1,\cdots,r) \tag{9-2-20}$$

が存在，そして (8-5-4a) により

$$g^i{}_{\alpha m-1}=\left.\frac{\partial {}_*\phi_\alpha{}^1}{\partial p_i}\right|_{p=p(q,\dot{q})}=\tau_\alpha{}^i \tag{9-2-21}$$

である．

(9-2-19) のために，

$$[L]_i g^i{}_{\alpha\mu}=\left(\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{\partial p_i}{\partial q^j}\dot{q}^j\right)g^i{}_{\alpha\mu}=0 \tag{9-2-22}$$

は Lagrange 方程式から $\ddot{q}^i$ を除去した方程式であるから，(8-4-7) の 2 次拘束 $\tau_\alpha{}^i S_i=0$ に他ならない．よって，(9-2-17) により

$$\phi_\alpha{}^2\equiv-\Psi_{\alpha m-2}=[L]_i g^i{}_{\alpha m-1}=0 \tag{9-2-23}$$

は 2 次拘束条件であることがわかる．次に (9-2-14) で $\mu=m-3$ とおいて得られる式

$$\Psi_{\alpha m-3}-D\phi_\alpha{}^2+[L]_i g^i{}_{\alpha m-2}\equiv 0 \tag{9-2-24}$$

において，$D\phi_\alpha{}^2$ の中の $\ddot{q}^i$，または $\dot{p}_i$ を $[L]_i=0$ を用いて消去すれば

$$\Psi_{\alpha m-3}=D\phi_\alpha{}^2|_{[L]_i=0}\equiv\phi_\alpha{}^3 \tag{9-2-25}$$

---

*) この仮定は (9-2-21) により，1 次拘束条件 ${}_*\phi^1{}_\alpha$ の独立性と同等であるから妥当である．

は 3 次拘束条件を与える．同様に，次つぎに

$$\phi_\alpha{}^{\mu+1} \equiv D\,\phi_\alpha{}^{\mu}|_{[L]=0} \tag{9-2-26}$$

とおくことにより拘束条件の列

$$\phi_\alpha{}^{\mu} \equiv (-1)^{\mu+1}\Psi_{\alpha m-\mu}=0 \qquad (\mu=1,\cdots,m) \tag{9-2-27}$$

を得る．最後に，(9-2-16) と (9-2-26)，(9-2-27) より

$$D\Psi_{\alpha 0}=D\phi_\alpha{}^{m}=0 \tag{9-2-28}$$

となる．こうして (9-2-26)，(9-2-27) は $\phi_\alpha{}^{\mu}$ の定常条件を要請（Lagrange 方程式の積分可能条件）することにより，次つぎに $\phi_\alpha{}^{\mu+1}$ を定義するが，(9-2-28) はこの拘束列は $\phi_\alpha{}^{m}$ で終ることを示している．

以上は Lagrange 形式での定式化であるが，次にこれを位相空間に変換し，ゲージ変換の生成子を導こう．

まず，(9-2-13) の $\Psi_{\alpha m-1}$ は恒等的に 0 であるから，位相空間での 1 次拘束 $_*\phi_\alpha{}^1$ である．実際に $\mu=m-2$ のときの (9-2-14) は位相空間で

$$_*\phi_\alpha{}^2(q,p)=D\Psi_{\alpha m-1}(q,p)|_{[L]=0}=\{\Psi_{\alpha m-1},H\} \tag{9-2-29}$$

と表される．上式の最右辺は Hamilton 方程式を用いて $\dot{p}_i$ を q^i，p_i で表すことに対応する．H_T でなく H を用いたのは，Lagrange 方程式 $[L]_i=0$ には未定関数 v^α は現れない（$\Psi_{\alpha m-1}\equiv 0$ のため）ので $\ddot{q}$ の消去には 1 次拘束は寄与しないからである．よって次式を得る．

$$_*\phi_\alpha{}^1(q,p)=\Psi_{\alpha m-1}=0, \tag{9-2-30}$$

$$_*\phi_\alpha{}^2(q,p)=\{_*\phi_\alpha{}^1,H\} \tag{9-2-31}$$

以下同様に (9-2-26) から

$$_*\phi_\alpha{}^{\mu+1}(q,p)=\{_*\phi_\alpha{}^{\mu},H\} \tag{9-2-32}$$

および (9-2-28) から

$$\{_*\phi_\alpha{}^{m},H\}=0 \tag{9-2-33}$$

を得る*)．

ここで次のような G を定義する：

$$G \equiv \sum_{\mu=0}^{m-1}(D^\mu\varepsilon^\alpha)\Psi_{\alpha\mu}=\sum_{\mu=0}^{m-1}(-1)^{m-\mu+1}(D^\mu{}_*\varepsilon^\alpha)\,{}_*\phi_\alpha{}^{m-\mu} \tag{9-2-34}$$

すると，(9-2-1)，(9-2-5) および (9-2-7) を用いて

$$G=p_i\delta q^i-F \tag{9-2-35}$$

---

*）　$[L]_i=0$ の中には 2 次拘束 $\phi_\alpha{}^2=0$ が入っているが，$\ddot{q}^i$ の消去にはそれは使われないので，(9-2-32)，(9-2-33) は強等式である．

と表される．この式はゲージ変換の生成子 G に対して得られた（9-1-31）に他ならない．よって（9-2-34）で定義された G はゲージ変換の生成子である：*)

$$\delta q^i=\{q^i, G\}=\frac{\partial G}{\partial p_i},\quad \delta p_i=\{p_i, G\}=-\frac{\partial G}{\partial q^i} \tag{9-2-36}$$

これで速度依存までのゲージ変換の生成子はすべて拘束条件の 1 次結合で表されることがわかった．最後の問題は ${}_*\phi_\alpha{}^\mu$ がすべて第 1 類拘束であることを示すことである．その証明にはゲージ変換は群をつくることを利用する．いま $G(\varepsilon_1)$ と $G(\varepsilon_2)$ をゲージ関数 ε_1 と ε_2 によって表される微小ゲージ変換の生成子としよう．$G(\varepsilon_a)$ によるゲージ変換で

$$\delta_a L=\frac{dF_a}{dt} \qquad (a=1,\ 2) \tag{9-2-37}$$

になったとすると，このゲージ変換を 2 回重ねてもやはり L は準不変になるから

$$\delta_2(\delta_1 L)=\frac{dF_{12}}{dt}$$

と表される．それゆえ $G(\varepsilon)$ は群をつくる．よって

$$G(\varepsilon_3)=\{G(\varepsilon_1), G(\varepsilon_2)\} \tag{9-2-38}$$

もやはり微小ゲージ変換の生成子であるから，${}_*\phi_\alpha{}^\mu$ の一次結合で与えられる．もし，G の中の ${}_*\phi_\alpha{}^k$ に第 2 類拘束が含まれていれば，$G(\varepsilon_3)$ は ${}_*\phi_\alpha{}^\mu$ のみでは表されないことになり，矛盾する．したがって，${}_*\phi_\alpha{}^\mu$ はすべて第1類拘束である．

これで，G の満たすべき条件（9-1-14）は常に存在することが示されたことになるが，δq^i の表式（9-2-1）と G の表式（9-2-34）に関連して，${}_*\phi_\alpha{}^\mu$ の定義に言及しておく．G の条件式（9-1-18）の所と例 9-4 で指摘したように，${}_*\varepsilon^\alpha{}_m={}_*\varepsilon^\alpha$ は t のみでなく q^i, p_i を含まねば解が存在しない場合がある．そのような場合の G には ${}_*\phi_\alpha{}^\mu$ の係数に ${}_*\varepsilon_\alpha(t)$ のみでなく，q, p の関数が現れるので（9-2-34）のように単純には書けない．しかし，そのような場合でも，微小ゲージ変換の生成子 G は必ず

$$G=\sum_{\mu=0}^{m-1}(D^\mu{}_*\varepsilon^\alpha(t))\,{}_*\Phi_\alpha{}^\mu(q, p) \tag{9-2-39}$$

---

*)（9-2-36）の δq^i は一見（9-2-35）と矛盾するように見えるがそうではない．（9-1-31）の所で指摘したように，G が p_i の 1 次以外の項を含むときのみ $F\neq 0$ である．p_i の 0 次の項は F に残るがそれは $\partial F/\partial p_i=0$ ゆえ δq^i に効かない．G が p の 2 次以上の項は F に p 依存項を与えるが，その場合は δq^i も p 依存になるので両者の p 微分が打消し，矛盾はない．

の形式に書き直せる．ただし$_*\Phi_\alpha{}^\mu$は$_*\phi_\alpha{}^\mu$の 1 次結合である．拘束条件には 1 次結合の任意性があるから，$_*\Phi_\alpha{}^\mu$を改めて第 1 類拘束と定義し直せばよい．（例 9-4 では$(q)^2{}_*\phi^1={}_*\Phi^1$を改めて第 1 次拘束に選べばよい．）本節の$_*\phi_\alpha{}^\mu$はこの$_*\Phi_\alpha{}^\mu$に当ることは$\delta q^i$の定義と$_*\phi_\alpha{}^\mu$の定義（9-2-27）からわかる．

場の理論のときも本質的には上記の方法と同じ処法で示すことができる．詳細は論文 [4] を参照されたい．

§ 9-3　消去可能なゲージ自由度

§ 8-4 で全 Hamiltonian H_Tの中に入れる第 1 類拘束は Hessian 行列の固有ベクトルに付随したもののみにすべきということを示した．一方，前節において 2 次第 1 類拘束もゲージ変換の生成子には寄与することも示した．これらのことからゲージ自由度とはいかなるものか，どんなゲージ自由度が見かけのものかということを調べねばならない．そのため，適当な変換でゲージ自由度が縮減できる場合はどんな条件のもとで存在するかを考えよう [5]．

ゲージ自由度が縮減できる場合として次の 2 つがある．

(i)　弱縮減の場合：適当な正準変換を行なって，Hamiltonian の中のゲージに関係する力学変数が他の変数から完全に分離されるとき．

(ii)　強縮減の場合：$2N$個のq^i, ξ^iで記述された$L(q,\xi)$が点変換$q\to Q(q)$によって2ν個のQ^λ，Ξ^ρの関数$L(Q^\lambda,\Xi^\rho)$に変換され，$2(N-\nu)$個のQ^α，Ξ^βがLから除去されるとき*)．

以下，これらが起こる場合の必要十分条件を求めよう．まず (i) の場合から始める．Hessian 行列の固有ベクトルに付随した 1 次第 1 類拘束系の中から，次の意味で広義の包合的な組，すなわち位相空間内において（ここでは$\phi_\alpha{}^1$を単にϕ_αと書く）

$$\left.\begin{aligned} {}_*X_T\,{}_*\phi_A &= \frac{\partial{}_*\phi_A}{\partial t}+\{{}_*\phi_A, H_T\}\equiv 0 \quad \mathrm{mod}\,({}_*\phi_A) \quad (A=1,\ \cdots,\ N-\nu) \\ &\{{}_*\phi_A, {}_*\phi_B\}\equiv 0 \quad \mathrm{mod}\,({}_*\phi_C) \end{aligned}\right\} \tag{9-3-1}$$

を満たす$_*\phi_\mu$の最大の組$\{{}_*\phi_A\}$をとる．(9-3-1) は$_*\phi_A\approx 0$上での$_*\phi_A$の定常性を示す式であるので，$_*\phi_A$から 2 次拘束条件は現れない．2 次拘束条件が現れるとしたら$\{{}_*\phi_A\}$以外の$_*\phi_b$から$_*X_T\,{}_*\phi_b$の形で出てくる．

弱縮減の条件　力学系が (9-3-1) を満たし，Hessian 行列の固有ベクトルに付随

---

*)　(ii) の場合は変数を水増ししたため生じた見掛け上のゲージ変換であって，ゲージ理論としては，物理的に興味のないものである．

した1次第1類拘束の広義の包合的な組 $\{{}_*\phi_A\}$ を持てば，$\{{}_*\phi_A\}$ に付随したゲージ自由度は弱縮減可能である．

証明を簡単に述べる．定理 8-1 で第2類拘束条件がない場合を考える．この定理と例 8-4 から $\{{}_*\phi_A\}$ は局所的に $(P_A \approx 0)$ となる正準変換がある．

$$\begin{gathered} q^i,\ p_i \to Q^i = (Q^\lambda, Q^A),\ P_i = (P_\lambda, P_A) \\ (i = 1, \cdots, N\ ;\ \lambda = 1, \cdots, \nu\ ;\ A = \nu+1, \cdots, N) \end{gathered} \tag{9-3-2}$$

拘束条件式 ${}_*\phi_A \approx 0$ は $P_A \approx 0$ で表される．ここで P_A は ${}_*\phi_b\,(b \neq A)$，${}_*\phi_\alpha{}^\mu\,(\mu \geq 2)$ に無関係に選ばれて，$P_A = C_A{}^B\,{}_*\phi_B$ となる．この正準変換によって，Hamilton 関数は

$$K_T(Q, P, t) = K(Q, P, t) + v^A P_A + v^b\,{}_*\phi_b(Q, P, t) \tag{9-3-3}$$

となる．ここで

$$K = H + \frac{\partial W}{\partial t}$$

W は正準変換の母関数である．(9-3-3) の $K(Q, P, t)$ および ${}_*\phi_b(Q, P, t)$ には P_A は含まれていないと考えることができる．もし K に P_A が含まれているとすると

$$K = K(P_A = 0) + P_A F^A(Q, P, t)$$

と書かれる．K の $P_A F^A$ は (9-3-3) の右辺の $v^A P_A$ に繰り入れることができるためである．ϕ_b についても同様である．よって運動方程式は

$$\dot{Q}^\lambda = \frac{\partial K}{\partial P_\lambda} + v^b \frac{\partial {}_*\phi_b}{\partial P_\lambda}\ ;\ \dot{P}_\lambda = -\frac{\partial K}{\partial Q^\lambda} - v^b \frac{\partial {}_*\phi_b}{\partial Q^\lambda} \tag{9-3-4}$$

$$\dot{Q}^A = v^A\ ;\ \dot{P}_A = -\frac{\partial K_T}{\partial Q^A} \equiv 0 \quad \mathrm{mod}\,(P_A) \tag{9-3-5}$$

(9-3-5) の第2式が成立するのは，$P_A = C_A{}^B\,{}_*\phi_B$ と (9-3-1) から $P_A \approx 0$ の定常性を導くことができるためである．この式は K_T が Q^A によらないことを示す．よって Hamilton 関数の中で Q^A，P_A が Q^λ，P_λ から分離され，また運動方程式においても分離され，自由度 ν の力学系に縮減された．逆の証明も容易になされよう．

ここで重要な点について注意しておく．すべての第1類拘束 ${}_*\phi_\alpha{}^\mu$ を入れた H_E をとると，すべての ${}_*\phi_\alpha{}^\mu$ はこの弱縮減の条件式を満たすので，これらの拘束条件に付随する自由度は正準変換で局所的に分離できる．よって，ゲージ自由度は見掛

けだけのもので正準変換でゲージ自由度を持たぬ力学系に移りうる [6]．これに反して，われわれのように，Hessian 行列の固有ベクトルに付随した第 1 類拘束条件のみをいれておけば，上の弱縮減の条件を満たさない拘束条件に付随した自由度は消去できない．

次に (ii) の場合について考えよう．点変換によって Lagrangian $L(q^1,\ \cdots,\ q^N,\ \xi^1,\ \cdots,\ \xi^N)$ は

$$l(q^1,\cdots,q^N\ ;\ \xi^1,\ \cdots,\ \xi^N)=L(Q^1,\ \cdots,\ Q^N\ ;\Xi^1,\ \cdots,\ \Xi^N)\ \ ;\ \dot{q}^i=\xi^i,\dot{Q}^i=\Xi^i$$

となるが，この L が次の形になったとする

$$l(q,\xi)=L(Q^\lambda,\Xi^\lambda)+\frac{d}{dt}F(Q^i,\Xi^i) \tag{9-3-6}$$

ここで Q^λ，Ξ^λ の λ は，$\lambda=1$，…，ν で Q^A，$\Xi^A\,(A=\nu+1,\ \cdots,\ N)$ は L には入っていない．この場合には Q^A，Ξ^A が Lagrangian から完全に消去されたことになる．このための条件を考えよう．

点変換によって

$$l\,(q^1,\cdots,q^N,\xi^1,\cdots,\xi^N)=L\,(Q^1,\cdots,Q^\nu,\Xi^1,\cdots,\Xi^\nu)\ \ (\nu<N) \tag{9-3-7}$$

となったとすると

$$a_{ij}=\partial^2 l/\partial\xi^i\partial\xi^j$$

は非正則となる．このことをまず示そう．正則な点変換

$$q^i\rightarrow Q^i=Q^i(q)\ \ ;\ \ \xi^i=\dot{q}^i\rightarrow\Xi^i=\dot{Q}^i$$

を考えているので

$$\Xi^i=\xi^j\frac{\partial Q^i}{\partial q^j}\ \ ;\ \ \xi^i=\Xi^j\frac{\partial q^i}{\partial Q^j}$$

これから

$$\frac{\partial\xi^i}{\partial\Xi^j}=\frac{\partial q^i}{\partial Q^j},\qquad \frac{\partial\Xi^i}{\partial\xi^j}=\frac{\partial Q^i}{\partial q^j}$$

$$\frac{\partial}{\partial Q^i}=\frac{\partial q^j}{\partial Q^i}\frac{\partial}{\partial q^j}+\frac{\partial\xi^j}{\partial Q^i}\frac{\partial}{\partial\xi^j}\ \ ;\ \ \frac{\partial}{\partial\Xi^i}=\frac{\partial\xi^j}{\partial\Xi^i}\frac{\partial}{\partial\xi^j}=\frac{\partial q^j}{\partial Q^i}\frac{\partial}{\partial\xi^j}$$

a_{ij} を $A_{\lambda\rho}=\partial^2 L/\partial\Xi^\lambda\partial\Xi^\rho$ で表そう．

$$a_{ij}=\frac{\partial^2 l}{\partial\xi^i\partial\xi^j}=\frac{\partial\Xi^k}{\partial\xi^i}\frac{\partial}{\partial\Xi^k}\left(\frac{\partial\Xi^\lambda}{\partial\xi^j}\frac{\partial L}{\partial\Xi^\lambda}\right)=\frac{\partial Q^k}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial\Xi^k}\left(\frac{\partial Q^\lambda}{\partial q^j}\frac{\partial L}{\partial\Xi^\lambda}\right)$$

$$=\frac{\partial Q^k}{\partial q^i}\frac{\partial Q^\lambda}{\partial q^j}\frac{\partial^2 L}{\partial\Xi^k\partial\Xi^\lambda}=\frac{\partial Q^\rho}{\partial q^i}\frac{\partial Q^\lambda}{\partial q^j}A_{\rho\lambda}\quad(\lambda,\ \rho=1,\ \cdots,\ \nu)\quad(9\text{-}3\text{-}8)$$

この式に $\partial q^j/\partial Q^A$ を掛けると

$$a_{ij}\frac{\partial q^j}{\partial Q^A}=\frac{\partial Q^\rho}{\partial q^i}\frac{\partial Q^\lambda}{\partial Q^A}A_{\lambda\rho}=0$$

よって

$$\tau^i_A=\frac{\partial q^i}{\partial Q^A}\tag{9-3-9}$$

は a_{ij} の固有値 0 の固有ベクトルであり，a_{ij} は非正則である．

強縮減の条件　運動の生成子 x_t として

$$x_t=\xi^i\frac{\partial}{\partial q^i}+\eta^i\frac{\partial}{\partial\xi^i}+\frac{\partial}{\partial t}\tag{9-3-10 a}$$

および 2 つのベクトル場

$$y_A=\tau^i{}_A\frac{\partial}{\partial q^i}+\dot{\tau}^i{}_A\frac{\partial}{\partial\xi^i}\tag{9-3-10 b}$$

$$z_A=-\tau^i{}_A\frac{\partial}{\partial\xi^i}\tag{9-3-10 c}$$

が完全系であり

$$\tau^i{}_A(q)p_i=0\tag{9-3-10 d}$$

が満たされていれば，Q^A，Ξ^A の自由度は強い意味で縮減できる．

証明は略し，これらの条件のもつ意味のみ述べる．(詳しい証明は文献 [5] を参照されたい.) (9-3-10 d) は§2-5 で述べたゲージ変換に対する Lagrangian $l(q,\xi)$ の不変性の条件式 (2-5-6)，(2-5-7) で $\eta_a=\tau_a=0$ という特別な場合にあたる．(9-3-9) と (9-3-10c) から次式は明らかである．

$$0=\tau^i{}_A p_i\ \leftrightarrow\ z_A l(q,\xi)=-\frac{\partial}{\partial\Xi^A}L=0\tag{9-3-11 a}$$

また，

$$y_A l(q,\xi)=\left(\frac{\partial q^i}{\partial Q^A}\frac{\partial}{\partial q^i}+\frac{\partial\xi^i}{\partial Q^A}\frac{\partial}{\partial\xi^i}\right)l(q,\xi)=\frac{\partial}{\partial Q^A}L=0\tag{9-3-11 b}$$

ただし(9-3-9)および

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial Q^A} = \Xi^j \frac{\partial^2 q^i}{\partial Q^j \partial Q^A} = \Xi^j \frac{\partial \tau^i_A}{\partial Q^j} = \dot{\tau}^i_A$$

の関係式を用いた．x_t，y_A，z_A を Q^i，Ξ^i 空間に移したものは

$$\left.\begin{aligned} X_t &= \Xi^i \frac{\partial}{\partial Q^i} + \eta^i(Q^\lambda, \Xi^\lambda)\frac{\partial}{\partial \Xi^i} + \frac{\partial}{\partial t} \quad (\lambda = 1, \cdots, \nu) \\ Y_A &= \frac{\partial}{\partial Q^A} \\ Z_A &= -\frac{\partial}{\partial \Xi^A} \end{aligned}\right\} \tag{9-3-12}$$

である．これらは完全系であり

$$Y_A L(Q^\lambda, \Xi^\rho) = Z_A L(Q^\lambda, \Xi^\rho) = 0$$

となるような q^i，$\xi^i \to Q^i$，Ξ^i の変数が存在することを意味していることが理解できよう．x_t，y_A，z_A が完全系をつくっている場合には２次拘束は現れない．

例 9-5

例 2-6 の模型を考える

$$l = \frac{1}{2} g_{ij}(q)\dot{q}^i\dot{q}^j - V(q) \quad ; \quad i, j = 1, \cdots, N$$

ここで g_{ij} の階数は$(N-r)$とする．(8-4-4)で定義した S_i は　$S_i = (\partial p_i/\partial q^j)\xi^j - \partial l/\partial q^i$ で，(8-4-7)に従って２次拘束を求めると

$$S_i \tau^i{}_A = \Gamma_{ijk}\tau^i{}_A \xi^j \xi^k + \frac{\partial V}{\partial q^i}\tau^i_A$$

l がゲージ変換 $\delta q^i = \varepsilon^A \tau^i_A$ で不変という条件は例 2-6，および(6-4-34)，(6-4-35)で示したように

$$\Gamma_{ijk}\tau^i{}_A = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i}\right\}\tau^i{}_A = 0 \quad ; \quad \tau^i{}_A \frac{\partial V}{\partial q^i} = 0$$

したがって

$$S_i \tau^i{}_A = 0$$

となって２次拘束は現れない．また，$y_A l = z_A l = 0$ も容易にわかる．この模型は$(N-r)$個の自由度に強縮減される．

このことを簡単な模型で示そう．g_{ij}，V として

$$g_{ij} = q^{-4}[q^2\delta_{ij} - q^i q^j] \qquad (i,\ j=1,\ \cdots,\ N)$$

$$V = V(q^i/q),\quad q = \sqrt{\Sigma\,(q^i)^2}$$

とおくと，g_{ij} の階数は$(N-1)$である．τ^i は q^i であるから

$$\Gamma_{ijk}\tau^i\xi^j\xi^k = -2(q)^{-2}(q\cdot\xi)g_{ij}\xi^j q^i = 0$$

$$\tau^i\frac{\partial V}{\partial q^i} = 0, \qquad p_i\tau^i = 0$$

を得る．このとき

$$y = \xi^i\frac{\partial}{\partial\xi^i} + q^i\frac{\partial}{\partial q^i}, \qquad z = -q^i\frac{\partial}{\partial\xi^i}$$

$$x = 2(q)^{-2}(q\cdot\xi)\xi^i\frac{\partial}{\partial\xi^i} + \xi^i\frac{\partial}{\partial q^i}$$

さらに，y，z のみでも完全系をつくるから

$$yf = 0,\quad zf = 0$$

は積分可能である．その独立な解は$2(N-1)$個存在し，完全解は

$$Q^i = \frac{q^i}{q}, \qquad \Xi^i = \frac{\xi^i}{q} - \frac{q^i(q\cdot\xi)}{q^3} = \dot{Q}^i$$

と表される．ただし

$$Q^2 = 1,\quad Q\cdot\Xi = 0$$

であるから，Q^i，Ξ^i のうち，それぞれ$(N-1)$個が独立である．

この解を用いて $l(q,\xi)$ は

$$L = \frac{1}{2}(\Xi^i)^2 - V(Q^i)$$

と表される．よって $N-1$ 個の独立変数の系に強縮減される．

位相空間で考えると，§9-1 の例 9-4 に並行に

$$p_i = q^{-2}(\delta_{ij} - q^i q^j/q^2)\dot{q}^j$$

$\sum p_i p_i = q^{-4}g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j$ を考慮すると正準 Hamiltonian と 1 次拘束条件は

$$H = \frac{1}{2}q^2\sum p_i p_i + V(q^i/q), \qquad \phi^1 = p_i q^i \approx 0$$

である．2 次拘束条件は現れず，ゲージ変換の生成子は

$$G=\varepsilon(t)p_i q^i$$

で与えられる．

上に述べたような自由度の縮減は適当な正準変換や点変換によって行なわれた．このような方法が見つからない場合，外部から条件を課すことによってゲージ自由度を消去する**ゲージ固定**の方法がある．

(iii)　ゲージ固定：ゲージ理論では第 1 類拘束条件の数だけ非物理的自由度があるから，これらを理論から消去するには第 1 類拘束条件の数と同じだけのゲージ固定の条件を外から課す必要がある．しかし，ゲージ変換の生成子 G の構造からわかるように，任意関数 ε_α は 1 次第 1 類拘束条件の数しか存在しない．したがってゲージ変換の自由度を使って勝手に消去できる自由度の数は 1 次第 1 類拘束の数だけである．

簡単のため，1 個の 1 次第 1 類拘束 ϕ^1 と，1 個の 2 次第 1 類拘束 ϕ^2 とがある場合を考える．ゲージ固定として次のような χ_1 をとる．

$$\chi_1\approx 0,\qquad \Delta=\{\phi^1,\chi_1\}\neq 0 \tag{9-3-13}$$

すると全 Hamiltonian　$H_T=H+v\phi^1$ の中のゲージ関数 v は $\Delta\neq 0$ のため

$$v=\Delta^{-1}\{\chi,H\} \tag{9-3-14}$$

と定まる．Dirac 括弧は

$$\{f,g\}^*=\{f,g\}-\{f,\chi_1\}\Delta^{-1}\{\phi^1,g\}+\{f,\phi^1\}\Delta^{-1}\{\chi_1,g\} \tag{9-3-15}$$

この Dirac 括弧を基本にとることは，$2(N-1)$ 次元の縮減位相空間で問題を扱うことに対応している．ここで注意しなければならないのは，2 次拘束が残っていることである．

ϕ^2 を落とすために，新しくゲージ固定 $\chi_2\approx 0$ を行なう場合，勝手な χ_2 では $\chi_2\approx 0$ の定常性が満たされなくなる．これは H_T の中には $u\phi^2$ のような項がないため，u によって $\chi_2\approx 0$ の定常性を満たすようにできないためである．これは任意関数は 1 つしかないことに対応し，ε と $\dot{\varepsilon}$ を用いて ϕ^1 と ϕ^2 に対応する自由度を同時に消去しようとするものである．したがって，可能なものとして運動方程式の第

1 積分の中で，たとえば積分定数を 0 とおいた

$$\chi_2 \approx 0, \qquad \{\chi_2, \phi^2\} \neq 0$$

のように χ_2 をとることが考えられる．こうすれば定常条件を満たすから $2(N-1)$ 次元の縮減位相空間を得る．しかし，一般には第 1 積分がわからない場合が多いので，この方法は用いられない．

次のような場合もある．ゲージ固定の条件式 $\chi_1 \approx 0$ の定常性からは v が定まらず新しい拘束条件式 $\chi_2 \approx 0$ が現れ，この定常性から v が定まることがある．

$$\left.\begin{aligned} &\{\chi_1, \phi^1\} \equiv 0 && \mathrm{mod}\,(\phi^1, \phi^2, \chi_1) \\ &\{\chi_1, \phi^2\} \not\equiv 0 && \mathrm{mod}\,(\phi^1, \phi^2, \chi_1) \\ &\{\chi_1, H_T\} \equiv \chi_2 && \mathrm{mod}\,(\phi^1, \phi^2, \chi_1) \end{aligned}\right\} \tag{9-3-16}$$

ここで Jacobi の恒等式を用いて

$$\begin{aligned} \{\phi^1, \chi_2\} &= \Big\{\phi^1, \{\chi_1, H_T\}\Big\} = -\Big\{\chi_1, \{H_T, \phi^1\}\Big\} - \Big\{H_T, \{\phi^1, \chi_1\}\Big\} \\ &= \{\chi_1, \phi^2\} + \mathrm{mod}\,(\phi^1, \phi^2, \chi_1, \chi_2) \approx \{\chi_1, \phi^2\} \neq 0 \end{aligned} \tag{9-3-17}$$

したがって，$\{\chi_2, H_T\} \approx 0$ から v が定まり，これ以上拘束条件式は現れない．ϕ^1, ϕ^2, χ_1, χ_2 を用いて Dirac 括弧をつくり $2(N-2)$ 次元縮減位相空間を得る．

この場合の例(次の例 9-6)をあげて，ゲージ固定の方法についての話を終える前に 1 つコメントを与えておく．

上で見たように自由度の縮減には Dirac 括弧が重要な役割を果たした．Dirac 括弧が時間と共にその形を保つことは理論の整合性のためには必要であるが，その証明は余り見られていないので，ここで示しておく．[3]

第 2 類拘束条件をまとめて θ_σ とする．$\{\theta_\sigma, \theta_\tau\} = \Delta_{\sigma\tau}$ とおくと逆行列 $\bar{\Delta}$ は

$$\bar{\Delta}^{\sigma\rho}\Delta_{\rho\tau} = \delta^\sigma{}_\tau \tag{9-3-18}$$

ある時刻での同時刻 Dirac 括弧の定義は任意の時刻で成立すべきである．時刻 $t+dt$ における同時刻 Dirac 括弧から時刻 t における同時刻 Dirac 括弧

$$\{f, g\}_t^* \equiv \{f, g\}_t - \{f, \theta_\sigma\}_t \bar{\Delta}^{\sigma\tau}\{\theta_\tau, g\}_t \tag{9-3-19}$$

を引くと，dt の 1 次の近似で

$$\{\dot{f}, g\}^* + \{f, \dot{g}\}^* = \{\dot{f}, g\} + \{f, \dot{g}\} - \{\dot{f}, \theta_\sigma\}\bar{\Delta}^{\sigma\tau}\{\theta_\tau, g\} - \{f, \theta_\sigma\}\bar{\Delta}^{\sigma\tau}\{\theta_\tau, \dot{g}\} - R \tag{9-3-20}$$

ただし

$$R \equiv \{f, \dot{\theta}_\sigma\}\bar{\Delta}^{\sigma\tau}\{\theta_\tau, g\} + \{f, \theta_\sigma\}\dot{\bar{\Delta}}^{\sigma\tau}\{\theta_\tau, g\} + \{f, \theta_\sigma\}\bar{\Delta}^{\sigma\tau}\{\dot{\theta}_\tau, g\} \tag{9-3-21}$$

上の $\dot{F}$ は　$\dot{F} \equiv \partial F/\partial t + \{F, H_T\}$ で定められている．Dirac 括弧 $\{\dot{f}, g\}^*$，$\{f, \dot{g}\}^*$ の定義を考慮すると，Dirac 括弧 $\{f, g\}^*$ の形が運動方程式のもとで保たれるためには上の R が弱い意味で 0 になるべきである．すべての θ_σ が，定常条件

$$\dot{\theta}_\sigma = a_\sigma{}^\tau\theta_\tau \tag{9-3-22}$$

を満たしていると，これを R に代入し，$R \approx 0$ の条件として

$$a\bar{\Delta} + \bar{\Delta}a + \dot{\bar{\Delta}} \approx 0 \tag{9-3-23}$$

が得られる．一方

$$\dot{\bar{\Delta}} = -\bar{\Delta}\dot{\Delta}\bar{\Delta}, \qquad \dot{\Delta} \approx a\Delta + \Delta a$$

これから

$$\dot{\bar{\Delta}} \approx -a\bar{\Delta} - \bar{\Delta}a \tag{9-3-24}$$

これは $R \approx 0$ の条件式(9-3-23)に他ならない．すべての拘束条件が運動方程式のもとで定常なら，これらの拘束条件を用いて作られる Dirac 括弧は時間と共にその形を保つことが示された．

例 9-6

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\{(\dot{q}^1)^2 + (\dot{q}^2)^2\} - \dot{q}^2q^3 + \frac{1}{2}(q^3)^2 \\ &= \frac{1}{2}(\dot{q}^1)^2 + \frac{1}{2}(\dot{q}^2 - q^3)^2 \end{aligned}$$

この模型は電磁場の場合と類似な性質をもっている．この Lagrangian は

$$q^1 \to q^1 \ ; \ q^2 \to q^2 + \varepsilon(t) \ ; \ q^3 \to q^3 + \dot{\varepsilon}(t)$$

に対して不変である．1 次拘束条件式は $p_3 \approx 0$ であり，H_T は

$$H_T = \frac{1}{2}({p_1}^2 + {p_2}^2) + q^3 p_2 + v p_3$$

である．2 次拘束として $p_2 \approx 0$ を得る．

ゲージ固定として次式をとる

$$q^2 \approx 0$$

$\dot{q}^2 \approx 0$ から $q^3 \approx 0$，$\dot{q}^3 \approx 0$ から $v = 0$ となる．$\theta_1 = q^2 \approx 0$，$\theta_2 = p_2 \approx 0$，$\theta_3 = q^3 \approx 0$，$\theta_4 = p_3 \approx 0$ から Dirac 括弧をつくろう

$$C_{st} = \{\theta_s, \theta_t\} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (C^{-1})^{st} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dirac 括弧の中で 0 にならないものは

$$\{q^1, p_1\}^* = 1$$

のみで他はすべて 0 である．Dirac 括弧をとることにより q^1，p_1 以外は取り除かれて

$$H_T = \frac{1}{2}{p_1}^2$$

となる．

電磁ポテンシャルを A_μ，それに正準共役な運動量を π^μ とする．電磁場と上の模型との間の対応は次のとおりである．

$$\phi^1 = p_3 \leftrightarrow \pi^0\,;\ \phi^2 = p_2 \leftrightarrow \partial_i \pi^i\,;\ \chi_1 = q^2 \leftrightarrow \partial^i A_i\,;\ \chi_2 = q^3 \leftrightarrow A_0$$

これを見るためにLagrange 密度関数として例 8-8 のように次式から出発しよう．

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\,;\quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$\chi_1 \equiv \partial^i A_i \approx 0$ をゲージ固定とする．すなわち，Coulomb ゲージをとる．運動方程式，π^i の定義式 $\pi^i = \partial_0 A_i - \partial_i A_0$，および 2 次拘束条件式 $\phi^2 \equiv \partial_i \pi^i \approx 0$ より

$$\Delta A_0 = \partial_i \partial^i A_0 = 0$$

を得る．これから，正則解で $|x^i| \to \infty$ で 0 となる A_0 は次のものに限られる．

$$A_0 \approx 0$$

ここで $\theta_1 \equiv \chi_1 \equiv \partial^i A_i \approx 0$, $\theta_2 \equiv \phi^2 \equiv \partial_i \pi^i \approx 0$, $\theta_3 \equiv \chi_2 \equiv A_0 \approx 0$, $\theta_4 \equiv \phi^1 \equiv \pi^0 \approx 0$ を第 2 類拘束条件式として，同時刻の Dirac 括弧をとると*)

$$\{A_0(\boldsymbol{x}),\ \pi^0(\boldsymbol{x}')\}^* = 0$$
$$\{A_i(\boldsymbol{x}),\ \pi^j(\boldsymbol{x}')\}^* = (\delta_i^j - \partial_i \frac{1}{\Delta} \partial^j)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$$

となる．$\{A_i, \pi^j\}^*$ は (8-2-4) で与えた力学量 f^* に対応する A_i^*，π^{*j} 間の通常の Poisson 括弧である．ここで，A_i^* は A_i の横波成分 A_i^T に等しく，A_i^T は $\partial^i A_i^T = 0$ を満たす．すなわち

$$A_i^* = A_i{}^T = A_i - \partial_i \frac{1}{\Delta} \partial^j A_j$$

π^i に対しても，同様に π^{iT} を定義し，Poisson 括弧をとると

$$\{A_i{}^T(\boldsymbol{x}),\ \pi^{jT}(\boldsymbol{x}')\} = (\delta_i^j - \partial_i \frac{1}{\Delta} \partial^j)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$$

を得る．

§ 9-4　第 2 類拘束条件のある場合の変換の生成子

第 1 類のみでなく第 2 類拘束の現れる力学系の対称性を考察する．Dirac が指摘したように，第 2 類拘束は通常はその力学系の自由度を縮減する役をするだけで，力学的興味が余りないとみなされている．それゆえ，§ 8-2 で述べたように，Dirac 括弧を用いて第 2 類拘束条件を強い拘束条件にして自由度を落す方法がとられる．しかし，本節で示すように，第 2 類拘束条件の中にはその 1 次結合が大域的対称性を表す変換（定数パラメーターを係数にもつ変換）の生成母関数となるものがある．それゆえ，第 2 類拘束は自由度を制限すると同時に，その力学系に大域的対称性を与える役をするとみられるもの（少なくとも大域的対称性と関係のあるもの）があり，物理的に重要な意味をもつことがある．

そこで，第 1 類と第 2 類拘束を区別せず，できるだけ同列に扱って，変換の生成子 G を構成するときに両者を混みにして，すべての拘束条件の 1 次結合をつくりその係数を決定する方法を与える．それによって，第 1 類拘束は任意関数を含むゲージ変換を与え，第 2 類拘束は定数パラメーターを含む大域的変換を与える

---

*)　$\frac{1}{\Delta} g$ は $\left(\frac{1}{\Delta} g(x)\right) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{d^3y}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} g(\boldsymbol{y})$ で定義する．ただし $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| = \{-(x^i-y^i)(x_i-y_i)\}^{1/2}$

ように分離することを示す．したがってここでは Dirac 括弧は用いない．

まず，有限自由度 N の系を扱い，拘束条件は時間を陽に含まないとして，第1類，第2類を次のように表すことにする：Hessian 行列の階数を $N\text{-}R$ として*)

全拘束条件：$\phi_\alpha{}^k$，$\alpha=1,\cdots,R$，$k=1,\cdots,K$,

第1類拘束：$\phi_a{}^\mu$，$a=1,\cdots,A$，$\mu=1,\cdots,M$,

第2類拘束：$\phi_s{}^\sigma$，$s=A+1,\cdots,R$，$\sigma=1,\cdots,\Sigma$.

すると全 Hamilton 関数は

$$H_T=H+v^a\phi_a{}^1+v^s\phi_s{}^1 \tag{9-4-1}$$

となる．H_T の中の v^s は第2類拘束 $\phi_s{}^\sigma$ の定常条件できまるから，それを $v^s{}_*$ と記す．$v^s{}_*$ は§8-1の(8-1-22 a)で求めたように次式で与えられる．

$$v^s{}_*(q,p)=-(C^{-1})^{sT}\{\theta_T,H\},\qquad C_{TU}=\{\theta_T,\ \theta_U\} \tag{9-4-2}$$

ただし，θ_T は $\phi_s{}^\sigma$ をまとめて表したものである．H_T を定まった既知部分と第1類拘束に分けて

$$H_T{}^*=H^*+v^a\phi_a{}^1 \tag{9-4-3}$$

$$H^*\equiv H+v^s{}_*\phi_s{}^1 \tag{9-4-4}$$

と表すことにする．

第2類拘束を含む一般化された変換の生成子を構成するために，高次拘束条件の列を H^* を用いて次のように定義し直すと第1類と第2類拘束条件の系列が分離し，綺麗にまとめ易くなる．

$$\phi_\alpha{}^{k+1}=\{\phi_\alpha{}^k,\ H^*\}, \tag{9-4-5}$$

および

$$\{\phi_\alpha{}^K,\ H^*\}=C^\beta_{\alpha k}\phi_\beta{}^k \tag{9-4-6}$$

と表そう．

こうすると，H^* のきめ方からして H^* は第1類関数であるから，第1類と第1類の Poisson 括弧はまた第1類となること(§8-1参照)を考慮すると，(9-4-5)の拘束列に $\phi_\alpha{}^k$ の2次以上の項が現れない通常の力学系では第1類拘束列と第2類拘束列に分離する**)．(第2類拘束の2次は第1類となることに注意)．

---

*) 本節§9-4と次節§9-5では $_*\phi_\alpha{}^\mu$，$_*\chi_\mu{}^\alpha$ の＊印を特に混乱のない限り省略する．

**) (9-4-8)の系列に第1類が現れないことは，(9-4-2)の $v^s{}_*$ の表式を用いて $\{\theta_T,H^*\}$ を計算すると $\{\theta_T,\ v^s{}_*\}\phi^1_s$ となることからわかる．

$$\phi_a{}^{\mu+1}=\{\phi_a{}^{\mu}, H^*\}, \tag{9-4-7}$$

$$\phi_s{}^{\sigma+1}=\{\phi_s{}^{\sigma}, H^*\}. \tag{9-4-8}$$

これで準備ができたので，無限小ゲージ変換の G と同じように，これら全拘束条件の 1 次結合をつくり

$$\tilde{G}=\varepsilon^{\alpha}{}_{k}\phi_{\alpha}{}^{k}=\varepsilon^{a}{}_{\mu}\phi_a{}^{\mu}+\eta^{s}{}_{\sigma}\,\phi_s{}^{\sigma} \tag{9-4-9}$$

を考える．$\tilde{G}$ の定常条件

$$\dot{\tilde{G}}=\frac{\partial\tilde{G}}{\partial t}+\{\tilde{G}, H_T{}^*\}\equiv 0 \quad \mathrm{mod}\,(\phi_{\alpha}{}^{1}) \tag{9-4-10}$$

は $H_T{}^*$ の中の v^a が任意であるから，2 つに分解され

$$\frac{\partial\tilde{G}}{\partial t}+\{\tilde{G}, H^*\}\equiv 0 \quad \mathrm{mod}\,(\phi_{\alpha}{}^{1}) \tag{9-4-11}$$

$$\{\tilde{G}, \phi_a{}^{1}\}\equiv 0 \quad \mathrm{mod}\,(\phi_{\alpha}{}^{1}) \tag{9-4-12}$$

となる．無限小変換

$$\delta q^i=\{q^i,\ \tilde{G}\}, \qquad \delta\dot{q}^i=\frac{d}{dt}\{q^i, \tilde{G}\} \tag{9-4-13}$$

によって，Lagrange 関数が準不変であるとしよう：

$$\delta L=\frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\delta\dot{q}^i=\frac{d\tilde{F}}{dt} \tag{9-4-14}$$

この条件を満たすように $\tilde{G}$の $\varepsilon^{\alpha}{}_{k}$ を(9-4-11)と(9-4-12)の解として決定する．

そのために，次の Hamilton 関数

$$\tilde{H}(q, p, \dot{q}^{\alpha})=p_i\dot{q}^i-L(q, \dot{q}) \tag{9-4-15}$$

を導入しよう．この $\tilde{H}$ の意味を説明する．運動量の定義式

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i} \tag{9-4-16}$$

において，A_{ij} の階数が $N-R$ なので，最後の $N-R$ 個の式$(i=R+1\sim N)$を $\dot{q}^r$ について解くことができるとしてよい：

$$\dot{q}^r=u^r(q^i, p_t, \dot{q}^{\alpha}) \quad \begin{pmatrix}\alpha=1,\cdots,R,\\ r,\ \ t=R+1,\cdots,N\end{pmatrix} \tag{9-4-17}$$

しかし，残る $\dot{q}^{\alpha}$ は不定なので，(9-4-15)において $\dot{q}^{\alpha}$ はそのまま残し，$\dot{q}^r$ のみを(9-4-17)によって消去したものが $\tilde{H}$ である．よって $\tilde{H}$ は(9-4-14)の δL を与える δq^i を求めるための補助手段として用いるのであって，運動の生成子としての Hamilton 関数は $H_T{}^*$ である．

すると $\tilde{H}$ の変分は

$$\delta\tilde{H}=\dot{q}^i\delta p_i-\frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i+\phi^1{}_\alpha\delta\dot{q}^\alpha \tag{9-4-18}$$

$$\phi_\alpha{}^1=p_\alpha-\left.\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^\alpha}\right|_{\dot{q}^r=u^r}\equiv p_\alpha-\Psi_\alpha(q^i,p_r) \tag{9-4-19}$$

となる．(9-4-17) は $p_r=\partial L/\partial\dot{q}^r$ と同等であるから

$$\Psi_\alpha(q^i,p_r)=\left.\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^\alpha}\right|_{p_r=\partial L/\partial\dot{q}^r}$$

とも表される．ここで Ψ_α は $\dot{q}^\alpha$ によらないことが大切な点である．

その証明をしよう．恒等式

$$p_r=\left.\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^r}\right|_{\dot{q}^r=u^r}\qquad(r=R+1,\cdots,N)$$

を $\dot{q}^\alpha$ について微分すると

$$0=\frac{\partial^2L}{\partial\dot{q}^r\partial\dot{q}^t}\frac{\partial u^t}{\partial\dot{q}^\alpha}+\frac{\partial^2L}{\partial\dot{q}^r\partial\dot{q}^\alpha}=A_{rt}\frac{\partial u^t}{\partial\dot{q}^\alpha}+A_{r\alpha}\quad(\alpha=1,\cdots,R) \tag{9-4-20}$$

を得る．他方，

$$\frac{\partial\Psi_\alpha}{\partial\dot{q}^\beta}=\frac{\partial}{\partial\dot{q}^\beta}\left(\left.\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^\alpha}\right|_{\dot{q}^r=u^r}\right)=A_{\alpha r}\frac{\partial u^r}{\partial\dot{q}^\beta}+A_{\alpha\beta} \tag{9-4-21}$$

である．しかるに A_{ij} の階数が $N-R$ であるから R 個の A_{ij} の核 $\tau^j{}_\alpha$ が存在する．よって

$$A_{ij}\tau^j{}_\alpha=A_{ir}\tau^r{}_\alpha+A_{i\beta}\tau^\beta{}_\alpha=0\qquad\begin{pmatrix}\alpha=1,\cdots,R\\ r=R+1,\cdots,N\end{pmatrix}$$

また $\det(A_{rt})\neq0$ であるから，$\det(\tau^\beta{}_\alpha)\neq0$ となる $\tau^\beta{}_\alpha$ が存在する*)．よって上式に $(\tau^{-1})^\alpha{}_\beta$ を乗ずることにより

$$A_{ir}B^r{}_\alpha=A_{i\alpha}\quad\text{あるいは}\quad A_{\alpha i}=C_\alpha{}^rA_{ri} \tag{9-4-22}$$

なる $C^r{}_\alpha=(B^T)^r{}_\alpha$ が存在する．この式を用いると (9-4-21) は (9-4-20) により

$$\frac{\partial\Psi_\alpha}{\partial\dot{q}^\beta}=C_\alpha{}^r\left(A_{rt}\frac{\partial u^t}{\partial\dot{q}^\beta}+A_{r\beta}\right)=0 \tag{9-4-23}$$

となる．これで Ψ_α が $\dot{q}^\alpha$ によらないことが示せた．

---

*) 対称行列 A_{ij} を対角化した場合 $A_{\alpha\beta}=0$ となるから，$\det(\tau^\beta{}_\alpha)\neq0$ が存在．

Ψ_α が $\dot{q}^\alpha$ によらないから，(9-4-19) によって $\phi_\alpha{}^1$ は 1 次拘束条件である．そして，(9-4-18) より

$$\dot{q}^i=\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial p_i}, \qquad \frac{\partial L}{\partial q^i}=-\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial q^i}, \tag{9-4-24}$$

$$\phi_\alpha{}^1=\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \dot{q}^\alpha} \tag{9-4-25}$$

を得る．$H_T{}^*$ は $v^s{}_*$ が固定されているので上式を満たさないことに注意しよう．こうして

$$\widetilde{H}=H+\dot{q}^\alpha\phi_\alpha{}^1, \qquad \phi_\alpha{}^1=p_\alpha-\Psi_\alpha(q,p_r) \tag{9-4-26}$$

と表される*)．全 Hamilton 関数は常に (9-4-26) のように表されることが一般的に証明されている．(9-4-4) の H^* を用いると

$$\widetilde{H}=H^*+\dot{q}^\alpha\phi_\alpha{}^1-v^s{}_*\phi_s{}^1=H^*+(\dot{q}^s-v^s{}_*)\phi_s{}^1+\dot{q}^a\phi_a{}^1. \tag{9-4-27}$$

となる．

Lagrange 関数の変分は (9-4-13) と (9-4-24) によって，§ 9-1 の計算と同様に

$$\begin{aligned}\delta L&=\frac{d}{dt}(p_i\delta q^i-\widetilde{G})+\frac{\partial \widetilde{G}}{\partial q^i}\dot{q}^i+\frac{\partial \widetilde{G}}{\partial t}+\frac{\partial L}{\partial q^i}\frac{\partial \widetilde{G}}{\partial p_i}-\phi_\alpha{}^1\delta\dot{q}^\alpha\\ &=\frac{d}{dt}\left(p_i\frac{\partial \widetilde{G}}{\partial p_i}-\widetilde{G}\right)+\frac{\partial \widetilde{G}}{\partial t}+\{\widetilde{G},\widetilde{H}\}-\phi_\alpha{}^1\delta\dot{q}^\alpha\end{aligned} \tag{9-4-28}$$

となる**)．さらに (9-4-27) を上式に代入すると

$$\begin{aligned}\delta L=&\frac{d}{dt}\left(p_i\frac{\partial \widetilde{G}}{\partial p_i}-\widetilde{G}\right)+(\dot{q}^s-v^s{}_*)\{\widetilde{G},\phi_s{}^1\}\\ &+\frac{\partial \widetilde{G}}{\partial t}+\{\widetilde{G},H^*\}+\dot{q}^\alpha\{\widetilde{G},\phi_\alpha{}^1\} \quad \mathrm{mod}\,(\phi_\alpha{}^1)\end{aligned} \tag{9-4-29}$$

ここで，$\widetilde{G}$ の定常条件 (9-4-11)，(9-4-12) が満たされるならば

$$(\dot{q}^s-v^s{}_*)\{\widetilde{G},\ \phi_s{}^1\}=\frac{df}{dt} \quad \mathrm{mod}\,(\phi_\alpha{}^1) \tag{9-4-30}$$

を要請することにより，L は準不変となる：

$$\delta L=\frac{d}{dt}\left(p_i\frac{\partial \widetilde{G}}{\partial p_i}-\widetilde{G}+f\right)\equiv\frac{d\widetilde{F}}{dt}. \tag{9-4-31}$$

---

*)　この $\phi_\alpha{}^1$ は，これまでの 1 次拘束条件 $\phi_\alpha{}^1=0$ を p_α について解いたもので，関数形は異なるが，拘束条件としては同等である．それゆえ同じ記号を用いた．

**)　(9-4-28) 式の導出で (9-4-24) が必要である．これでなぜ $H_T{}^*$ や H^* の他に $\widetilde{H}$ を導入したかその理由がわかるであろう．$H_T{}^*$ は (9-4-24) を満たさないからである．

fの形は(9-4-30)の左辺が時間の全微分となるような解を求めることにより定まる．(9-4-31)で，ゲージ変換のみのときと比較し，f項が付加されていることに注意しよう．

第2類拘束が存在する場合の拡張されたゲージ変換の生成子 $\tilde{G}$ の構成法をまとめると

$$\tilde{G}=\varepsilon^{\alpha}{}_{k}\phi_{\alpha}{}^{k}=\varepsilon^{a}{}_{\mu}\phi_{a}{}^{\mu}+\eta^{s}{}_{\sigma}\phi_{s}{}^{\sigma} \tag{9-4-32}$$

の満たすべき条件は $\tilde{G}$ の定常条件

$$\frac{\partial\tilde{G}}{\partial t}+\{\tilde{G},H^{*}\}\equiv 0\quad \mathrm{mod}\,(\phi_{\alpha}{}^{1}), \tag{9-4-33 a}$$

$$\{\tilde{G},\phi_{a}{}^{1}\}\equiv 0\quad \mathrm{mod}\,(\phi_{\alpha}{}^{1}), \tag{9-4-33 b}$$

および，変換(9-4-13)のもとでの L の準不変性の条件

$$(\dot{q}^{s}-v^{s}{}_{*})\{\tilde{G},\phi_{s}{}^{1}\}=\frac{df}{dt}\quad \mathrm{mod}\,(\phi_{\alpha}{}^{1}) \tag{9-4-33 c}$$

である．ここで留意すべき点は，定常条件(9-4-33 a, b)の解は，§9-2で示したように常に存在するが，(9-4-33 c)の解は必ずしも存在するとは限らず，$\phi_{s}{}^{1}$ によっては $\eta^{s}{}_{\sigma}=0$ となる場合もあるということである．$\varepsilon^{a}{}_{\mu}$ は§ 9-1で論じたように，任意関数を含みゲージ変換を与えるが，$\eta^{s}{}_{\sigma}$ は定数パラメーター，あるいは定数パラメーターを係数とする q,p の定まった関数である．（もし $\eta^{s}{}_{\sigma}$ が任意関数を含む解を持つならば，ゲージ変換の自由度が増し矛盾する.）

(9-4-33 a)より得られる $\varepsilon^{\alpha}{}_{k}$ の漸化式は(9-4-5)，(9-4-6)により

$$\dot{\varepsilon}^{\alpha}{}_{k}+\varepsilon^{\alpha}{}_{k-1}+\varepsilon^{\beta}{}_{K}C^{\alpha}_{\beta k}=0 \tag{9-4-34}$$

$$\dot{\varepsilon}^{\alpha}{}_{k}\equiv\frac{\partial\varepsilon^{\alpha}{}_{k}}{\partial t}+\{\varepsilon^{\alpha}{}_{k},H^{*}\} \tag{9-4-35}$$

であるが，(9-4-7)，(9-4-8)を用いれば，$\varepsilon^{\alpha}{}_{k}$ の代わりに $\varepsilon^{a}{}_{\mu}$ と $\eta^{s}{}_{\sigma}$ に対し，上式と同形の式が成り立つ．そして $\tilde{G}$ は分解されて

$$\tilde{G}=G(\varepsilon)+N(\eta) \tag{9-4-36}$$

となる．$N(\eta)$ は定数パラメーターを含む大域的変換の生成子である．こうして $\eta^{s}{}_{\sigma}\neq 0$ の場合第2類拘束は大域的対称性と関連する拘束条件と解釈される．

無限自由度の場の理論の場合は，Lagrange 関数密度 L，Hamilton 関数密度 H，H_{T}，H^{*} を同様に定義し，変換生成子(母関数)密度 $\mathscr{G}$ を用いて定式化できる．(9-4-32)，(9-4-33)はそれぞれ

$$\tilde{G}=\int d^3x\tilde{\mathscr{G}}(\varepsilon)\equiv\int d^3x[\varepsilon^a{}_\mu\phi_a{}^\mu+\eta^s{}_\sigma\phi_s{}^\sigma] \tag{9-4-37 a}$$

$$\frac{\partial\mathscr{G}}{\partial t}+\{\tilde{\mathscr{G}},H^*\}\equiv 0 \quad \mathrm{mod}\,(\phi_\alpha{}^1), \tag{9-4-37 b}$$

$$\{\tilde{\mathscr{G}},\phi_\alpha{}^1\}\equiv 0 \quad \mathrm{mod}\,(\phi_\alpha{}^1), \tag{9-4-37 c}$$

および

$$(\dot{q}^s(x)-v^s{}_*)\{\tilde{G},\phi_s{}^1\}=\partial_\mu f^\mu \quad \mathrm{mod}\,(\phi_\alpha{}^1) \tag{9-4-37 d}$$

とすればよい．[2]

以上の定式化において，(9-4-33 c) や (9-4-37 d) が得られたのは第 1 次拘束を (9-4-19) の形式にしたからであることを改めて指摘しておく．

第 2 類拘束によってつくられる $N(\eta)$ から得られる変換

$$\delta_\eta q^i=\frac{\partial N(\eta)}{\partial p_i}$$

は L を準不変にするという意味で，N は大域的変換の生成子ではあるが，G とちがって必ずしも正準変換の生成子ではない．すなわち，余分な付加項のため，$\partial N/\partial q^i=-\delta_\eta p_i$ とはならない場合もある (例 9-7 参照)．その場合は，$N(\eta)$ はそのままでは大域的対称性に対応する微小正準変換の生成子ではない．

しかし，L が与えられ，第 2 類拘束が存在する場合に，本節の手続きにより $\tilde{G}$ を求めれば L を準不変にする変換 $\delta_\eta q^i$ が求まることは重要な結果であり，発見法的手段として有意義である．他方，Noether 保存量

$$J_N(\eta)=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\delta_\eta q^i$$

あるいは場の理論では

$$J_N(\eta)=\int d^3xJ_o=\int d^3x\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i(x)}\delta_\eta q^i(x)$$

は，大域的微小正準変換の生成子である．$N(\eta)$ に付加項がつき $J_N(\eta)$ と一致しないときは，$N(\eta)$ から $\delta_\eta q^i$ を求め，上式によって，$J_N(\eta)$ を得れば，付加項のない生成子を得ることができる．

例 9-7　第 2 類拘束のみ存在する場合一質量のある Yang-Mills 場

質量のある Yang-Mills 場の Lagrange 関数密度は

$$L=-\frac{1}{4}F^a{}_{\mu\nu}F_a{}^{\mu\nu}+\frac{1}{2}m^2A^a{}_\mu A^\mu{}_a$$

$$F^a{}_{\mu\nu}=\partial_\mu A^a{}_\nu-\partial_\nu A^a{}_\mu+gf^a{}_{bc}A^b{}_\mu A^c{}_\nu.$$

$A^a{}_\mu$ に共役な運動量は

$$\pi_a{}^\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{A}^a{}_\mu} = -F_a^{0\mu}$$

であり，1次拘束条件は質量のない場合と同じく

$$\phi_a{}^1 = \pi_a{}^0$$

である．Hamilton 関数密度は

$$H = -\frac{1}{2}\pi_a{}^i\pi^a{}_i + \frac{1}{4}F^a{}_{ij}F_a^{ij} - A^a{}_0 D^i{}_{ab}\pi^b{}_i - \frac{1}{2}m^2 A^a{}_\mu A_a{}^\mu$$

$$H_T = H + v^a\phi_a{}^1. \qquad (a \text{ は内部自由度で第 1 類の意味でない})$$

2次拘束は

$$\phi_a{}^2 = \{\phi_a{}^1, \int d^3x\, H_T\} = D_{ab}{}^i\pi^b{}_i + m^2 A_a{}^0$$

であり，

$$\{\phi_a{}^1(x), \phi_b{}^2(x')\} = \delta_{ab}m^2\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$$

ゆえに，$\phi_a{}^1$，$\phi_a{}^2$ は第2類拘束である．したがって，3次拘束は現れない：

$$\dot{\phi}_a{}^2 = \{\phi^2{}_a, \int d^3x\, H_T\} = -f_{abc}A^b{}_0\phi_c{}^2 + m^2(D_{ab}{}^i A^b{}_i + v^a) \approx 0$$

右辺の $\phi_c{}^2$ 項は落して v^a をきめると

$$v^a{}_* = -D_{ab}{}^i A^b{}_i = -\partial_i A_a{}^i.$$

よって

$$H_T{}^* = H + v^a{}_*\phi_a{}^1 = H - \pi^a{}_0\partial_i A_a{}^i$$

そして $H_T{}^*$ によって改めて $\phi_a{}^2$ を定義し直しても元と同じであり，

$$\dot{\phi}_a{}^2 = \{\phi_a{}^2, \int d^3x H_T{}^*\} = -f_{abc}A^b{}_0\phi_c{}^2$$

となる．（上式の右辺が mod$(\phi_a{}^1)$ とならないのは，$\phi_a{}^2$ 項を落して，$v^a{}_*$ をきめたためである．）

変換の生成子

$$\widetilde{\mathscr{G}} = \eta^a{}_1\phi_a{}^1 + \eta^a{}_2\phi_a{}^2$$

の満たすべき条件は (9-4-34) と (9-4-33 c) に対応して

$$\eta^a{}_1 + \dot{\eta}^a{}_2 - f_{abc}\eta^b{}_2 A^c{}_0 = 0 \quad \mathrm{mod}\,(\phi_a{}^1),$$
$$(\partial_0 A_a{}^0 - v^a{}_*)\{\widetilde{G}, \pi_a{}^0\} = \partial_\mu f^\mu \quad \mathrm{mod}\,(\phi_a{}^1).$$

$v^a{}_* = -\partial_i A_a{}^i$ を用いると，上の第2式は

$$\partial_\mu A_a{}^\mu \cdot \{\tilde{G}, \pi_a{}^0\} = \partial_\mu f^\mu \quad \mathrm{mod}\,(\phi_a{}^1)$$

となる．また

$$\{\tilde{G}, \pi_a{}^0\} = \{\eta^b{}_2, \pi_a{}^0\}\phi_b{}^2 + \eta^b{}_2 m^2 \quad \mathrm{mod}\,(\pi_a{}^0)$$

ゆえ，$\eta^b{}_2$ が定数ならば，上式の条件は満たされる．$\eta^a{}_2 = \eta^a =$ 定数とおいて

$$f^\mu = m^2 \eta^a A_a{}^\mu$$

なる解が存在する．すると定常条件より

$$\eta^a{}_1 = f^a{}_{bc}\eta^b A^c{}_0$$

となり，

$$\tilde{G} = N = \int d^3x\,\mathcal{N} = \int d^3x\,\eta^a(-f_{abc}\pi^{b\mu}A^c{}_\mu + \partial_i \pi_a{}^i + m^2 A_a{}^0)$$

を得る．右辺第 2 項の $\eta^a \partial_i \pi_a{}^i$ は $\delta A^a{}_\mu$ には効かないので表面積分で落してよい．この $\tilde{G}$ により生成される変換

$$\delta_\eta A^a{}_\mu(x) = \frac{\delta \tilde{G}}{\delta \pi_a{}^\mu(x)} = f^a{}_{bc}\eta^b A^c{}_\mu$$

は内部空間の回転である．この大域的変換の下で回転不変な L は当然ながら $\delta L = 0$ となる．しかし，$\delta N / \delta A_a{}^0 = \eta^a m^2 - \eta^c f^a{}_{bc}\pi^b{}_0 \approx \eta^a m^2 \neq 0$
であるから，正しい $\delta_\eta \pi^a{}_0$ を与えない．

他方，(9-4-31) からは

$$\delta L = \partial_0\left(\pi^a{}_\mu \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \pi^a{}_\mu} - \mathcal{N} + f^0\right) = \partial_0(\eta^a \partial_i \pi_a{}^i) = \partial_i(\eta^a \partial_0 \pi_a{}^i)$$

となり，作用積分の変分は表面積分により 0 となる*)．

内部空間の回転の下での不変性に対応する Noether 保存流は

$$J_\mu = \frac{\partial L}{\partial A^a{}_{\nu,\mu}}\delta A^a{}_\nu = -F^a{}_{\mu\nu}\delta A_a{}^\nu = -\eta^a f_{abc}F^b{}_{\mu\nu}A^{c\nu}$$

である．これから得られる変換の生成子は

$$J_N(\eta) = \int d^3x J_0 = -\int d^3x \eta^a f_{abc}\pi^b{}_\nu A^{c\nu}$$

となる．これから得られる変換 $\delta_\eta A^a{}_\mu$ は $N(\eta)$ から得られたものと一致する．逆に，$N(\eta)$ から $\delta_\eta A^a{}_\mu$ を導き，それを用いて $J_N(\eta)$ をつくることができる．

なお，$N(\eta)$ も $J_N(\eta)$ も保存量であるが，$N(\eta)$ は $H_T{}^*$ のもとで $\mathrm{mod}\,(\phi^1)$ で保存

---

*）　場の理論では，δL に 3 次元発散の不定性があることが示されるので，$\partial_i \pi^i{}_a$ は余り問題にならない．

するのに対して，$J_N(\eta)$ は $\partial_i J^i$ を表面積分で落し，運動方程式のもとで保存する．両者のずれの原因はここにある．

例 9-8　電磁場と荷電 Fermi 粒子系—第 1 類と第 2 類拘束の共存—

荷電粒子とゲージ場とが相互作用する系は第 1 類と第 2 類の共存する典型的な例である．簡単なモデルとしてスピン 1/2 の Dirac 粒子と電磁場の相互作用系をとる．一般の Yang-Mills 場も同様にやれる．

Lagrange 密度は

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{i}{2}[\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - (\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi] - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu - m\bar{\psi}\psi$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

A_μ，ψ，ψ^+ の共役運動量は*)

$$\pi^\mu = L\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = -F^{0\mu}$$

$$\pi = L\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial(\partial_0\psi)} = \frac{i}{2}\psi^+,\ \ \pi^+ = L\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial(\partial_0\psi^+)} = \frac{i}{2}\psi.$$

よって，3 つの 1 次拘束が存在する：

$$\phi_0{}^1 = \pi^0 \approx 0,$$

$$\phi^1 = \pi^+ - \frac{i}{2}\psi \approx 0,$$

$$\phi^{1+} = \pi - \frac{i}{2}\psi^+ \approx 0.$$

通常のように同時刻の次数つき Poisson 括弧(graded P. b.)**)によって

$$\{A_\mu(\boldsymbol{x}), \pi^\nu(\boldsymbol{x}')\} = \delta^\nu{}_\mu\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),$$
$$\{\psi(\boldsymbol{x}), \pi(\boldsymbol{x}')\} = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),$$
$$\{\psi^+(\boldsymbol{x}), \pi^+(\boldsymbol{x}')\} = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),$$

これ以外のものはすべて 0 となる．これにより ϕ^1 と ϕ^{1+} は第 2 類拘束となる．

---

*)　$\overleftarrow{\partial}$ は左からの微分を表す．

**)　次数つき Poisson 括弧の定義は次の通り：

$$\{F, G\} = \left(F\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q^i}\right)\left(\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p_i}G\right) - (-1)^{|F||G|}\left(G\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q^i}\right)\left(\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p_i}F\right),$$

ここで $|F|$ は F が Dirac 場の奇数個の積のとき 1，偶数個(0 を含む)のとき 0.

$$\{\phi^{1+}(\boldsymbol{x}), \phi^1(\boldsymbol{x}')\} = -i\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}').$$

全 Hamilton 関数

$$H_T = H + \int d^3x[v^0\phi_0{}^1 + \phi^{1+}v + v^+\phi^1]$$

であるが，ただし v，v^+ は Dirac 場から作られる未定係数である．ここに

$$H = \int d^3x\{-\frac{1}{2}\pi_i\pi^i + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} - A_0\partial_i\pi^i$$
$$- \frac{i}{2}[\bar{\psi}\gamma^i\partial_i\psi - (\partial_i\bar{\psi})\gamma^i\psi] + eA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi + m\bar{\psi}\psi\}.$$

この H_T により，$\phi_0{}^1$ の定常条件から

$$\phi_0{}^2 = \dot{\phi}_0{}^1 = \{\phi_0{}^1, H_T\} = \partial_i\pi^i - e\psi^+\psi \approx 0$$

$\phi_0{}^2$，ϕ^1，ϕ^{1+} は第 2 類拘束であるが，これらの 1 次結合

$$\Phi_0{}^2 = \phi_0{}^2 + ie(\phi^{1+}\psi + \psi^+\phi^1) = \partial_i\pi^i + ie(\pi\psi + \psi^+\pi^+)$$

をつくると同時刻で

$$\{\Phi_0{}^2(\boldsymbol{x}), \phi^1(\boldsymbol{x}')\} = -ie\phi^1(\boldsymbol{x})\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),$$
$$\{\Phi_0{}^2(\boldsymbol{x}), \phi^{1+}(\boldsymbol{x}')\} = ie\phi^{1+}(\boldsymbol{x})\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$$

ゆえ，$\Phi_0{}^2$ は第 1 類となる．よって 2 つの第 1 類拘束 $\phi_0{}^1$，$\Phi_0{}^2$，および 2 つの第 2 類拘束を得る．

第 2 類拘束 ϕ^1，ϕ^{1+} の定常条件は v，v^+ を次のように決定する

$$v_* = -\gamma^0[\gamma^i(\partial_i\psi) + ieA_\mu\gamma^\mu\psi + im\psi]$$
$$v^+{}_* = (\partial_i\bar{\psi})\gamma^i - ieA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu - im\bar{\psi}$$

こうして全 Hamilton 関数として

$$H_T{}^* = H^* + \int d^3x\, v^0\phi_0{}^1$$

$$H^* = \int d^3x\{-\frac{1}{2}\pi_i\pi^i + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} - A_0\partial_i\pi^i$$

$$-\pi\gamma^0[\gamma^i(\partial_i\psi) + ieA_\mu\gamma^\mu\psi + im\psi] + [(\partial_i\bar{\psi})\gamma^i - ieA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu - im\bar{\psi}]\pi^+\}$$

を得る．この H^* を用いると，$\phi_0{}^1$ の定常条件は

$$\{\phi_0{}^1, H^*\} = \partial_i\pi^i + ie(\pi\psi + \psi^+\pi^+) = \Phi_0{}^2,\quad \{\Phi_0{}^2, H^*\} = 0$$

となるから，第 1 類拘束系列 $\phi_0{}^1$，$\Phi_0{}^2$ と第 2 類拘束 ϕ^1，ϕ^{1+} とは分離する．

次にゲージ変換と大域的変換の生成子を構成しよう．

$$\tilde{G} = \int d^3x[\mathscr{G}(\varepsilon) + \mathscr{N}(\eta)]$$

$$\mathscr{G} = \varepsilon^0{}_1\phi_0{}^1 + \varepsilon^0{}_2\Phi_0{}^2$$
$$\mathcal{N} = \eta^+{}_1\phi^1 + \phi^{1+}\eta_1$$

とおくと，(9-4-37)に対応する定常条件

$$\frac{\partial\mathscr{G}}{\partial t} + \{\mathscr{G}, H^*\} \equiv 0 \quad \mathrm{mod}\,(\phi_0{}^1),$$
$$\{\mathscr{G}, \phi_0{}^1\} \equiv 0 \quad \mathrm{mod}\,(\phi_0{}^1)$$

は $\varepsilon^0{}_1 = -\dot{\varepsilon}(x)$，$\varepsilon^0{}_2 = \varepsilon(x)$ の解をもつ($\varepsilon(x)$ は任意関数)．また(9-4-37d)はこの場合

$$\{\widetilde{G}, \phi^{1+}\}(\partial_o\psi - v_*) - (\partial_o\psi^+ + v^+{}_*)\{\widetilde{G}, \phi^1\} = \partial_\mu f^\mu \quad \mathrm{mod}\,(\phi^1, \phi^{1+})$$

すなわち

$$i\eta_1{}^+(\partial_o\psi - v_*) + (\partial_o\psi^+ + v^+{}_*)i\eta_1 = \partial_\mu f^\mu$$

となる．この条件式の解を求めるために

$$\eta_1 = iX\psi, \quad \eta_1{}^+ = i\psi^+X$$

とおくと，

$$X = e(c + c_5\gamma_5)$$
$$f^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu X\psi$$

を得る．ここに c と c_5 は定数パラメータである．ただし ψ の質量 $m \neq 0$ のとき $c_5 = 0$ である．

こうして第1類拘束からゲージ変換の生成子

$$G(\varepsilon) = \int d^3x(-\dot{\varepsilon}(x)\phi_0{}^1 + \varepsilon\Phi_0{}^2)$$
$$= \int d^3x[-\partial_\mu\varepsilon(x)\pi^\mu + ie\varepsilon(x)(\pi\psi + \psi^+\pi^+)]$$

および第2類拘束から大域的変換の生成子

$$N(c) = \int d^3xie(c\mathcal{N}_0 + c_5\mathcal{N}_5),$$

を得た．ここに

$$\mathcal{N}_0 = \phi^{1+}\psi + \psi^+\phi^1 = \pi\psi + \psi^+\pi^+ - i\psi^+\psi$$
$$\mathcal{N}_5 = \phi^{1+}\gamma_5\psi + \psi^+\gamma_5\phi^1 = \pi\gamma_5\psi + \psi^+\gamma_5\pi^+ - i\psi^+\gamma_5\psi.$$

$\mathcal{N}_0$ と $\mathcal{N}_5$ はそれぞれ $U(1)$ とカイラル $U(1)_5$ 対称性を生成する．

例 9-9　第2類拘束の2次を含むモデル

物理的ではないが，形式的な問題点を示すため次の系をとる．

$$L = c_1\dot{q}^1 + c_2\dot{q}^2 - q^1(q^2)^2.$$

これより，1次拘束は

$$\phi_\alpha{}^1 = p_\alpha - c_\alpha \qquad (\alpha = 1,\ 2)$$

そして

$$H_T = q^1 (q^2)^2 + v^\alpha \phi_\alpha{}^1$$

となる．$\phi_\alpha{}^1$ の定常条件は

$$\dot{\phi}_1{}^1 = -(q^2)^2,\ \dot{\phi}_2{}^1 = -2q^1 q^2$$

ここで，2次拘束のとり方に2通りの可能性がある：

(1)　$\phi_1{}^2 = \phi_2{}^2 = q^2$：通常の方法で，$\dot{\phi}_1{}^1$ は第2類拘束 q^2 の2次式である．

(2)　$\phi_1{}^2 = -(q^2)^2,\ \phi_2{}^2 = -2q^1 q^2$

変換の生成子の構成から見ると(2)の場合の方が望ましいことがわかる．以下にその理由を示す．

(1)の場合，$\phi_\alpha{}^1 = p_\alpha - c_\alpha,\ \phi_\alpha{}^2 = q^2$

こうすると，$\phi_1{}^1$ は第1類，$\phi_2{}^1$，$\phi_2{}^2$ は第2類拘束となる．そして

$$H^* = q^1 (q^2)^2, \qquad v^2{}_* = 0,$$

$$H_T{}^* = H^* + v\phi_1{}^1.$$

変換の生成子は

$$\tilde{G} = \varepsilon_1 \phi_1{}^1 + \eta_\sigma \phi_2{}^\sigma$$

とおける．途中の計算は省略して結果を記すと

$$\tilde{G} = \varepsilon(t) q^1 \phi_1{}^1 - \frac{1}{2}\varepsilon(t) q^2 \phi_2{}^1 + g(q^2)\phi_2{}^2,$$

$$\delta q^1 = \varepsilon(t) q^1,\ \delta q^2 = -\frac{1}{2}\varepsilon(t) q^2$$

$$\delta L = \frac{d}{dt}\left(c_1 q^1 \varepsilon - \frac{1}{2} c_2 q^2 \varepsilon\right)$$

となる．$\varepsilon(t)$ は任意関数，g は q^2 の任意関数である．

この結果をみると，ゲージ自由度は $\varepsilon(t)$ で表され，1であるが，第2類拘束の $\phi_2{}^1$ の係数が $\eta_1 = -\frac{1}{2}\varepsilon(t) q^2$ の解を有する．その理由は $\dot{\phi}_1{}^1 = -(\phi_1{}^2)^2 = -(\phi_2{}^2)^2 = -(q^2)^2$ となり，第1類の系列と第2類が分離しないからである．

(2)の場合，$\phi_\alpha{}^1 = p_\alpha - c_\alpha,\ \phi_1{}^2 = -(q^2)^2,\ \phi_2{}^2 = -2q^1 q^2$

$\phi_\alpha{}^2$ の定常条件

$$\dot{\phi}_1{}^2 = \{\phi_1{}^2,\ H_T\} = -2v^2 q^2 \approx 0$$

$$\dot{\phi}_2{}^2 = -2(v^1 q^2 + v^2 q^1) \approx 0$$

より

$$v^\alpha = u^\alpha(t)\, q^\alpha \qquad (\alpha\ \text{の和はとらない})$$

ここに u^αは任意関数である．すると

$$\dot{\phi}_1{}^2 = 2u^2(t)\,\phi_1{}^2,\ \ \dot{\phi}_2{}^2 = (u^1(t) + u^2(t))\,\phi_2{}^2.$$

となり

$$H_T = q^1(q^2)^2 + u^\alpha q^\alpha(p_\alpha - c_\alpha) = H^* + u^a\Phi_a{}^1$$

$$\Phi_a{}^1 \equiv q^a(p_a - c_a) = q^a\phi_a{}^1 \qquad (a\ \text{の和はとらない，}\ a = 1,\ 2)$$

と表される．

こうすると $\Phi_a{}^1$，$\phi_a{}^2$ はすべて第１類となる．そこで，変換の生成子を

$$\tilde{G} = \varepsilon^a{}_1\Phi_a{}^1 + \varepsilon^a{}_2\phi_a{}^2$$

とおき，定常条件によって $\varepsilon^\alpha{}_\mu$ を求めると

$$\varepsilon^1{}_2 = \varepsilon^1(t)\,q^1 + \varepsilon^2(t)\,q^2$$

$$\varepsilon^2{}_2 = -\frac{1}{2}\varepsilon^1(t)\,q^2 - \frac{1}{2}\varepsilon^2(t)\frac{(q^2)^2}{q^1}$$

となり，最後に

$$\tilde{G} = [\varepsilon^1(t)\,q^1 + \varepsilon^2(t)\,q^2]\,\phi_1{}^1 - \frac{1}{2}\left[\varepsilon^1(t)\,q^2 + \varepsilon^2(t)\frac{(q^2)^2}{q^1}\right]\phi_2{}^1$$

を得る．そして，この $\tilde{G}$ により生成されるゲージ変換に対して

$$\delta L = \frac{d}{dt}(c_\alpha\delta q^\alpha) = \frac{d}{dt}\left[-c_1(\varepsilon^1 q^1 + \varepsilon^2 q^2) + \frac{c_2}{2}\left(\varepsilon^1 q^2 + \varepsilon^2\frac{(q^2)^2}{q^1}\right)\right]$$

となる．

この場合は，2 つの第 1 類拘束列 $\Phi_a{}^1$，$\phi_a{}^2\,(a = 1,\ 2)$ に対して，ゲージ自由度が 2 となるので，(1) の場合（1 つのゲージ自由度を見逃している）よりも妥当である．（詳細は文献[7]を参照）

§ 9-5 H_T 形式と H_E 形式の比較

さきに§8-3 で触れたように，拘束系の Hamilton 関数として，1 次拘束条件を正準 Hamilton 関数 H に付加した

$$H_T = H + v^\alpha\phi_\alpha{}^1, \qquad v^\alpha：\text{任意関数} \tag{9-5-1}$$

をとるか，あるいは第1類拘束条件についてはすべての $\phi_\alpha{}^\mu$ を H に加えた

$$H_E = H + \lambda^\alpha{}_\mu\phi_\alpha{}^\mu, \qquad \lambda^\alpha{}_\mu：\text{任意関数} \tag{9-5-2}$$

をとるかの問題がある．本節では H_E により拡張されたゲージ変換の正否を論ずる

のが目的ゆえ第 2 類拘束のない力学系を考察する．

結論を先にいうと，H_T 形式の方が H_E 形式より妥当であり，H_E 形式は種々不合理な結果に導くことを示す．

これまで，Lagrange 形式と完全に同等な H_T 形式を中心に定式化してきたので，本節では H_E 形式について述べ，問題点を指摘する．

まず，H_E の系から Lagrange 形式にもどったとき，$\phi_\alpha{}^1(q,p(q,\dot{q}))$ は恒等的に消えるが，$\phi_\alpha{}^\mu(\mu\geq 2)$ は必ずしも 0 でないから，元の Lagrange 形式と等価でない．事実，すでに例 8-8 で電磁場について示したように，Lagrange 方程式と，Hamilton 方程式とは一致しないし，運動量 p_i と $\dot{q}^i$ との関係も異なる．よって H_E 形式は元の Lagrange 関数の系と異なる力学系に移っていることを指摘しておく．

ゲージ変換について：　H_E の中の $\lambda^\alpha{}_\mu$ はすべて任意ゆえ，個々の $\phi_\alpha{}^\mu$ が独立にゲージ変換の生成子となる．$\kappa^\alpha{}_\mu$ を微小任意関数として変換

$$\begin{aligned}\delta q_i&=\kappa^\alpha{}_\mu\{q^i,\phi_\alpha{}^\mu\},\\ \delta p_i&=\kappa^\alpha{}_\mu\{p_i,\phi_\alpha{}^\mu\},\end{aligned}\tag{9-5-3}$$

は $r\times m$ 個の拡張されたゲージ変換を与える．そして H_E は(9-5-3)と

$$\delta\lambda^\alpha{}_\mu=\dot{\kappa}^\alpha{}_\mu-C^{\nu\rho\alpha}_{\beta\gamma\mu}\lambda^\beta{}_\nu\kappa^\gamma{}_\rho+C^{\nu\alpha}_{\beta\mu}\kappa^\beta{}_\nu\tag{9-5-4}$$

によって準不変となる．ただし，右辺の係数 C の定義は

$$\{\phi_\alpha{}^\mu,\phi_\beta{}^\nu\}=C^{\mu\nu\gamma}_{\alpha\beta\rho}\phi_\gamma{}^\rho,\quad\{\phi_\alpha{}^\mu,H\}=C^{\mu\beta}_{\alpha\nu}\phi_\beta{}^\nu.\tag{9-5-5}$$

しかし，L は $\lambda^\alpha{}_\mu$ を含まないので(9-5-3)の下で準不変とはならないことは明らかである．

この拡張されたゲージ変換の疑問点は，その変換の生成子が速度位相空間で存在するとは限らないことである．拘束条件のある特異系では速度位相空間でのベクトル場は位相空間への写像が常に存在するが，逆は必ずしも可能でない．ある関数 $f(q,p)$ の Hamilton ベクトル場 ${}_*X_f$ の速度位相空間への写像 X_f が存在する条件は(8-5-24)である．したがって

$$\{\phi_\alpha{}^\mu,\ \phi_\beta{}^1\}\equiv 0\quad\mathrm{mod}\,(\phi^1)\tag{9-5-6}$$

を満たさない $\phi_\alpha{}^\mu$ で生成される(9-5-3)の変換は Lagrange 形式では存在しないことになる．これに対して，H_T 形式で構成されるゲージ変換の生成子 G は(9-1-14)を満たすから，速度位相空間への写像は常に存在することはすでに述べた．

ただしここで言及しておくべきことは，もし(9-5-6)を満たさない $\phi_\alpha{}^\mu$ が存在し

たとしても，それらの1次結合

$$\Phi_\alpha{}^\mu = \alpha_{\alpha\nu}^{\mu\beta}\ \phi_\beta{}^\nu \tag{9-5-7}$$

をつくることで，

$$\{\Phi_\alpha{}^\mu, \Phi_\beta{}^1\} \equiv 0 \quad \mathrm{mod}\,(\Phi^1) \tag{9-5-8}$$

となる $\Phi_\alpha{}^\mu$ が存在することである．その可能性は§9-2の終りの所で述べた通りである．それにしても，第1類拘束 $\phi_\alpha{}^\mu$ をそのまま H_E 形式のゲージ変換の生成子にできるとは限らない．(9-5-7)のような1次結合は H_T 形式で G を構成し，$\varepsilon^\alpha(t)$ の係数を見ればわかる．

ゲージ不変量について：ゲージ不変量 $F(q,p)$ は位相空間では H_E 形式の場合

$$\{F(q,p), \phi_\alpha{}^\mu\} \equiv 0 \quad \mathrm{mod}\,(\phi_\beta{}^\mu) \quad （すべての\ \alpha,\ \mu\ に対して） \tag{9-5-9}$$

によって定義される．他方，H_T 形式ではゲージ変換の生成子 G によって

$$\{F(q,p), G\} \equiv 0 \quad \mathrm{mod}\,(\phi_\alpha{}^\mu) \tag{9-5-10}$$

で与えられる．G を構成する $\phi_\alpha{}^\mu$（あるいは(9-5-7)の $\Phi_\alpha{}^\mu$）の係数 $\varepsilon^\alpha{}_\mu$ は(9-2-34)のように，$d^{m-\mu}\varepsilon_\alpha/dt^{m-\mu}$ を含む．$\varepsilon^\alpha(t)$ は任意であるから，各 $\varepsilon^\alpha{}_\mu$ の係数をそれぞれ ≈ 0 とおくことで，(9-5-9)と(9-5-10)は同等であると見なされている．

しかし，$\phi_\alpha{}^\mu$ が

$$\frac{\partial^2\phi_\alpha{}^\mu}{\partial p_i \partial p_j} \neq 0,\ あるいは\ \frac{\partial^2 G}{\partial p_i \partial p_j} \neq 0 \tag{9-5-11}$$

のような場合には(9-1-28)のように，位相空間でのゲージ変換 $\delta_* p_i$ と $\delta p_i(q,\dot{q})$ とは等しくなく，Lagrange 方程式の上でのみ一致する．Lagrange 形式では $\delta\dot{q}^i = d\delta q^i/dt$ として L の準不変性が整合的に成立するようになっている．

すると，(9-5-11)のような $\phi_\alpha{}^\mu$ については(9-5-3)のゲージ変換は Lagrange 形式では運動方程式の外で $\delta p_i(q,\dot{q})$ からずれるのでゲージ不変量は H_E 形式と Lagrange 形式とでは一致しない．$\phi_\alpha{}^\mu$ によって生成されるゲージ変換(9-5-3)は L を不変にしないのだから，$\delta\dot{q}^i$ を $d\delta q^i/dt$ とすること自体意味のないことである．

ゲージ不変量 F の変化は速度位相空間では

$$\begin{aligned}\delta F[q, p(q,\dot{q})] &= \frac{\partial F}{\partial q^i}\delta_* q^i + \frac{\partial F}{\partial p_i}\delta p_i(q,\dot{q}) \\ &= \frac{\partial F}{\partial q^i}\delta_* q^i + \frac{\partial F}{\partial p_i}\delta_* p_i + \frac{\partial F}{\partial p_i}(\delta p_i(q,\dot{q}) - \delta_* p_i) \\ &= \{F, G\} + \frac{\partial F}{\partial p_i}A_{ij}\frac{\partial^2 G}{\partial p_j \partial p_k}\left(\dot{p}_k - \frac{\partial L}{\partial q^k}\right)\end{aligned}$$

となる．上式の導出には，§9-1 のゲージ変換 (9-1-20)，(9-1-27) および (9-1-28) の関係を用いた．この δF は運動方程式の上で (9-5-10) あるいは (9-5-9) と一致するが，その外では一致しない*)．

ゲージ固定について：　H_T と H_E の比較で一番違いが大きく，かつ重要なテーマであろう．

外から条件を加えることでゲージ自由度を固定し，物理的自由度を採り出すことは常に必要な操作であるが，H_T 形式と H_E 形式とでは本質的ともいえる差がある．H_T の場合のゲージ固定法について，§9-3 で簡単に触れたが，改めて一般的な考察を行なう．

第 1 類拘束条件の数だけの非物理的自由度を消去するには，第 1 類拘束と同数のゲージ固定条件を外から課して，第 1 類拘束とゲージ固定条件とが第 2 類拘束になるようにする必要がある．その場合に，拘束条件が定常的でなければならなかったように，ゲージ固定も定常条件を満たさねばならない．そうしなければ，運動方程式と矛盾し，整合的な物理系が得られないからである．このゲージ固定の定常性の要請が H_T 形式と H_E 形式を分ける重要な原因となる．

H_T 形式においては，H_T に現れる任意関数 v^α は r 個あるが，これら v^α を $\phi_\alpha{}^\mu$ と同数のゲージ固定条件

$$\chi_\mu{}^\alpha \approx 0 \quad \begin{pmatrix} \alpha=1, \cdots, r, \\ \mu=1, \cdots, m \end{pmatrix} \tag{9-5-12}$$

の定常条件

$$\dot{\chi}_\mu{}^\alpha = \{\chi_\mu{}^\alpha, H_T\} = \{\chi_\mu{}^\alpha, H\} + v^\beta \{\chi_\mu{}^\alpha, \phi_\beta{}^1\} \approx 0 \tag{9-5-13}$$

によって決定すれば，ゲージが固定されたことになる．ところが，$\phi_\alpha{}^\mu$ をすべて第 2 類拘束に落してそれら自由度を消去するには，$\{\phi_\alpha{}^\mu, \chi_\nu{}^\beta\}$ のつくる $r\times m$ 行 $r\times m$ 列の行列が

$$\varDelta \equiv \det(\{\phi_\alpha{}^\mu, \chi_\nu{}^\beta\}) \neq 0 \tag{9-5-14}$$

を満たさねばならない．すると，すべての $\chi_\mu{}^\alpha$ を (9-5-14) の満たす範囲で任意に選んだのでは，(9-5-13) と矛盾する．H_T の中の v^α を決定するには r 個の χ で充分であるから，$\chi_\mu{}^\alpha$ のうちで任意にとれるのは r 個のみで，残りの $\chi_\nu{}^\beta$ は (9-5-13) と (9-5-14) を満たすように選ばなければならない．このことは，ゲージ変換の生成子 G に含まれる任意関数 ε^α は r 個 (1次第1類拘束の数) であるから，この ε^α の

*)　この不一致は古典論では問題にならないかも知れないが，量子論，特に径路積分では無視できない可能性がある．

任意性を用いて，0にしうるゲージ自由度はr個のみであることと一致する．このようにH_T形式では$\chi_\mu{}^\alpha$はかなりきつい制限をうける．

そのような$\chi_\mu{}^\alpha$の組をシステマティックに構成する方法を次に示す．まず，最初に選ぶ$\chi_1{}^\alpha$は

$$\{\phi_\alpha{}^\mu, \chi_1{}^\beta\} \equiv 0 \mod(\phi, \chi_1) \quad (\mu=1, \cdots, m-1), \tag{9-5-15}$$

$$\det\{\phi_\alpha{}^m, \chi_1{}^\beta\} \neq 0 \mod(\phi, \chi_1), \tag{9-5-16}$$

かつ

$$\{\chi_1{}^\alpha, H\} \neq 0 \mod(\phi, \chi_1), \tag{9-5-17}$$

となるようにしなければならない．

(証明)．$\chi_1{}^\alpha$の定常条件は(9-5-15)により

$$\dot{\chi}_1{}^\alpha = \{\chi_1{}^\alpha, H_T\} \approx \{\chi_1{}^\alpha, H\} \equiv \chi_2{}^\alpha \approx 0 \tag{9-5-18}$$

を得る．$\chi_2{}^\alpha$は(9-5-17)のために新たなゲージ固定を与える．以下同様に，これを繰返し，

$$\chi_{\mu+1}{}^\alpha \equiv \{\chi_\mu{}^\alpha, H\} \tag{9-5-19}$$

とおくことで，

$$\dot{\chi}_{m-1}{}^\alpha = \{\chi_{m-1}{}^\alpha, H_T\} \approx \{\chi_{m-1}{}^\alpha, H\} \equiv \chi_m{}^\alpha \approx 0. \tag{9-5-20}$$

(9-5-19)は$\phi_\alpha{}^\mu$の定常条件(9-1-15)に対応するものである．こうして最後に

$$\dot{\chi}_m{}^\alpha = \{\chi_m{}^\alpha, \ H\} + v^\beta\{\chi_m{}^\alpha, \ \phi_\beta{}^1\} \approx 0 \tag{9-5-21}$$

を得る．この右辺第2項の$\{\chi_m{}^\alpha, \phi_\beta{}^1\}$は正則であることが，(9-5-15)，(9-5-16)および(9-5-19)を用いて次のように示すことができる．(9-1-15)とJacobiの恒等式により

$$\begin{aligned}\{\phi_\alpha{}^m, \chi_1{}^\beta\} &= \{\{\phi_\alpha^{m-1}, H\}, \chi_1{}^\beta\} = \{\{\chi_1{}^\beta, H\}, \phi_\alpha^{m-1}\} + \{\{\phi_\alpha^{m-1}, \chi_1{}^\beta\}, H\} \\ &\approx -\{\phi_\alpha^{m-1}, \chi_2{}^\beta\} \mod(\phi, \chi_1).\end{aligned}$$

同様の操作を繰り返して

$$\{\phi_\alpha{}^m, \chi_1{}^\beta\} \approx (-1)^{m-1}\{\phi_\alpha{}^1, \chi_m{}^\beta\} \mod(\phi, \chi_1). \tag{9-5-22}$$

よって(9-5-16)のおかげで

$$\det(\{\phi_\alpha{}^1, \chi_m{}^\beta\}) \neq 0 \mod(\phi, \chi_1). \tag{9-5-23}$$

となる．

(9-5-21)と(9-5-23)から，v^βを

$$v^\beta = -(\Delta_1^{-1})^\beta{}_\alpha\{\chi_m{}^\alpha, H\} \tag{9-5-24}$$

ただし

$$(\Delta_1)^{\beta}{}_{\alpha} \equiv \{\phi_{\alpha}{}^{1}, \chi_{m}{}^{\beta}\} \tag{9-5-25}$$

とすることで，$\chi_m{}^\alpha$ の定常条件は満たされる．こうして，すべての $\chi_m{}^\alpha$ の定常条件と v^α の固定という要請が満たされ，整合的にゲージ固定が完了することが示された．

次は(9-5-14)～(9-5-19)を満たす $\chi_1{}^\alpha$ の組が常に存在するかという問題である．そのような $\chi_1{}^\alpha$ は存在するが，その存在の証明は文献〔3〕にゆずり，ここでは割愛する．

これに対して H_E 形式の場合のゲージ固定条件は簡単である．(9-5-2)の H_E は $\phi_\alpha{}^\mu$ と同数の未定関数 $\lambda^\alpha{}_\mu$ を含むから，ゲージ固定 $\chi_\mu{}^\alpha$ の定常条件は(9-5-14)のみの要請で満たされる：

$$\dot{\chi}_{\mu}{}^{\alpha} = \{\chi_{\mu}{}^{\alpha}, H\} + \lambda^{\beta}{}_{\nu}\{\chi_{\mu}{}^{\alpha}, \phi_{\beta}{}^{\nu}\} \equiv 0 \qquad \mathrm{mod}\,(\phi,\ \chi) \tag{9-5-26}$$

において，$\det\ \{\chi_\mu{}^\alpha,\ \phi_\beta{}^\nu\} \neq 0$ ならば，$\lambda^\beta{}_\nu$ は $\mathrm{mod}\,(\phi,\ \chi)$ の下で一義的に定まり，$\chi^\alpha{}_\mu$ の定常性は満たされる．したがって，H_E 形式ではゲージ固定は(9-5-14)の範囲で任意である*)．

このように，ゲージ固定条件に関して，H_T と H_E 形式とでは質的な差があることを強調しておきたい．それにもかかわらず，H_T 形式と H_E 形式とは同等であり，しかも，H_T 形式は H_E 形式の特殊な場合 $(\lambda^\alpha{}_\mu=0,\ \mu\geq 2)$ として H_E 形式に含まれるとの主張がある．しかし，以上の考察から，両形式は物理的内容が明らかに異なるものであり，H_T は H_E 形式に含まれない．

例 9-10

H_T 形式と H_E 形式の違いを見るために，さきの例 9-4 (p. 203) に提示したモデルを使う．拘束条件は

$$\phi^1 = p_i q^i,\quad \phi^2 = (p)^2 + \frac{2c}{(q)^2} = 2H,$$

であるから

$$H_T = H + v\phi^1 = v\phi^1 + \frac{1}{2}\phi^2,$$
$$H_E = H + \lambda_\mu \phi^\mu \approx \lambda_1\phi^1 + \lambda_2\phi^2$$

となる．

---

*）　ゲージ理論を径路積分を用いて量子化する方法を Faddeev が定式化した．Faddeev の理論は H_E 形式に基づいている．また，それを BRST 変換に拡張した Batalin-Vilkovisky 形式も H_E 形式の上に構成されている．これら径路積分に関する問題点については文献 [9] を参照されたい．

L は例 9-4 で求めた

$$G=(q)^2[-\dot{\varepsilon}(t)\phi^1+\varepsilon(t)\phi^2]$$

により生成される微小ゲージ変換で不変である．他方 H_E は

$$\delta q^i=\kappa_\mu\{q^i,\ \phi^\mu\},\quad \delta p_i=\kappa_\mu\{p_i,\ \phi^\mu\}$$

$$\delta\lambda_\mu=\dot{\kappa}_\mu+〔(2\lambda_2+1)\kappa_1-2\lambda_1\kappa_2〕\delta_{\mu 2}$$

の変換で不変である．

しかし，

$$\{\phi^1,\phi^2\}=2\phi^2$$

のために，(9-5-6) を満たさないから，ϕ^2によって生成される拡張されたゲージ変換の生成子

$$_*X_{\phi 2}=2p_i\frac{\partial}{\partial q^i}+\frac{4c}{(q)^4}q^i\frac{\partial}{\partial p_i}$$

の速度位相空間への写像 $X_{\phi 2}$は存在しない．それゆえ，ϕ^2を拡張されたゲージ変換とみなすのは妥当でない．ただし，ϕ^2の代わりに

$$\Phi^2=(q)^2\phi^2$$

を用いれば，$\{\Phi^2,\phi^1\}=0$となるので，

$$_*X_{\Phi 2}=2(q)^2p_i\frac{\partial}{\partial q^i}-2(p)^2q^i\frac{\partial}{\partial p_i}$$

の写像は

$$X_{\Phi 2}=2(q)^2p_i\frac{\partial}{\partial q^i}+2(q\dot{q})\dot{q}^i\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}$$

として存在する．

このように，すべての第1類拘束を無条件に拡張されたゲージ変換の生成子として用いると矛盾に陥ることがある．

次に，ゲージ不変量 F を見てみよう．H_E 形式による F の定義 (9-5-9) によると，ゲージ不変量として次のものがある：

$$\phi^1,\quad \phi^2,\quad l_{ij}=q^ip_j-q^jp_i$$

しかし，G によって生成される速度位相空間での変換は

$$\delta\phi^1(q,p(q,\dot{q}))=0$$

$$\delta\phi^2(q,p(q,\dot{q}))=\sum_{ij}4\varepsilon(q)^2p_ig_{ij}\left(\dot{p}_j-\frac{\partial L}{\partial q^j}\right)\neq 0,$$

$$\delta l_{ij}(q,p(q,\dot{q}))=\sum_k 2\varepsilon(q)^2(q^ig_{jk}-q^jg_{ik})\left(\dot{p}_k-\frac{\partial L}{\partial q^k}\right)\neq 0$$

となる．このように，ϕ^2，l_{ij} は速度位相空間では必ずしもゲージ不変ではない．よって，H_E 形式でのゲージ不変量は H_T 形式の不変量とは限らない．

例 9-11　Yang-Mills 理論におけるゲージ固定

H_T と H_E 形式におけるゲージ固定の違いを Yang-Mills 場で示そう．正準 Hamilton 関数は

$$H=\int d^3x\left(-\frac{1}{2}\pi_a{}^i\pi^a{}_i+\frac{1}{4}F^{ij}{}_aF^a{}_{ij}-A^a{}_0D_{abi}\pi^{bi}\right),$$

$$D_{ab\mu}=\delta_{ab}\partial_\mu-gf_{abc}A^c{}_\mu.$$

拘束条件は第 1 類で

$$\phi_a{}^1=\pi_a{}^0\approx 0,\quad \phi_a{}^2=D_{abi}\pi^{bi}\approx 0.$$

である．

まず H_T 形式でのゲージ固定の例として，Coulomb ゲージをとろう．

$$\chi_1{}^a=\partial^iA^a{}_i\approx 0,$$
$$H_T=H+v^a\pi_a{}^0$$

であるから，この $\chi_1{}^a$ は (9-5-15)～(9-5-17) を満たす：

$$\{\phi_a{}^1,\chi_1{}^b\}=0,\quad \{\phi_a{}^2(\boldsymbol{x}),\chi_1{}^b(\boldsymbol{x}')\}=D_{abi}\partial^i\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\neq 0,$$
$$\{\chi_1{}^a,H\}=\partial^i(-\pi^a{}_i+D^a{}_{bi}A^b{}_0)=\chi_2{}^a.$$

$\chi_2{}^a$ の定常条件

$$\dot{\chi}_2{}^a=\{\chi_2{}^a,H\}+\int d^3x'v^b\{\chi_2{}^a(x),\pi_b{}^0(x')\}=\{\chi_2{}^a,H\}+D^a{}_{bi}\partial^iv^b\approx 0$$

により v^b がきまる．したがって，ゲージ固定条件は

$$\chi_1{}^a=\partial^i A^a{}_j=0,$$
$$\chi_2{}^a=\partial^i(-\pi^a{}_i+D^a{}_{bi}\;A^b{}_0)\approx gf^a{}_{bc}A^b{}_i\pi^{ci}+\partial^iD^a{}_{bi}A^b{}_0\approx 0$$

となる．これら $\phi_a{}^\mu$，$\chi_\mu{}^a$ は (9-5-14) を満たす．この $\chi_2{}^a$ は正準運動量の定義

$$\pi^a{}_i=-\partial_0A^a{}_i+D^a{}_{bi}A^b{}_0$$

および $\chi_1{}^a\approx 0$ と整合的であることがわかる．

他方，H_E 形式では

$$H_E=H+\int d^3x(\lambda^a{}_1\phi_a{}^1+\lambda^a{}_2\phi_a{}^2)$$

から，ゲージ固定として

$$\chi_1{}^a=\partial^iA^a{}_i\approx 0,\quad \chi_2{}^a=A^a{}_0\approx 0$$

を採用できる．すると，$\phi_a{}^\mu$，$\chi_\mu{}^a$ は (9-5-14) を満たすから

$$\dot{\chi}_1{}^a=\{\chi_1{}^a,H\}+\partial^iD^a{}_{bi}\lambda^b{}_2\approx 0$$

$$\dot{\chi}_2{}^a=\{\chi_2{}^a, H\}+\lambda^a{}_1\approx 0,$$

により $\lambda^a{}_\mu$ がきまる．

しかし，これら $\chi_1{}^a$，$\chi_2{}^a$ は $\pi^a{}_i$ の定義と整合的でない．実際に，$A^a{}_0\approx 0$ であるから

$$\pi^a{}_i\approx -\partial_0 A^a{}_i,$$

よって

$$\phi_a{}^2=D_{abi}\pi^{bi}\approx\partial_i\pi_a{}^i-gf_{abc}A^b{}_i(\partial_0 A^{ci})$$
$$\approx-\partial_0\partial_i\ A_a{}^i-gf_{abc}\ A^b{}_i(\partial_0\ A^{ci})\approx-gf_{abc}A^b{}_i(\partial_0 A^{ci})\approx 0$$

を得るが，これは新たな拘束条件を与える．したがって，$\phi_a{}^\mu, \chi_\mu{}^a$ 以外に余分の拘束条件が現れ矛盾する．

ただし，上式より明らかなように，電磁場(可換ゲージ場)の場合は新拘束条件は現れないので $\partial^i A_i=0$，$A_0=0$ でも矛盾はない．

§ 9-6　ゲージ群の分類

われわれは§9-1および§9-2で作用積分を不変にするゲージ変換およびその生成子を第1類拘束条件を用いて与える処法を示した．この生成子がどんなゲージ群を作るのか，また群がどんな型に分類されるかは興味あることであろう．

k 次第1類拘束条件を

$$\phi^k{}_\alpha\quad(k=1,\ 2,\ \cdots,\ K\ ;\ \alpha=1,\ \cdots,\ A)$$

とする*)．拘束条件の定常性に現れる拘束条件の系列として

$$\{\phi^k{}_\alpha, H\}=\phi^{k+1}{}_\alpha\quad(k=1,\cdots,K-1)\tag{9-6-1}$$

$$\{\phi^K{}_\alpha, H\}=C^\beta{}_{\alpha k}\phi^k{}_\beta\tag{9-6-2}$$

ここで H は H_T の中の正準 Hamiltonian である．第1類 $\phi^k{}_\alpha$ は包合的な関係式

$$\{\phi^k{}_\alpha, \phi^l{}_\beta\}=C^{kl\gamma}_{\alpha\beta,\ m}\phi^m{}_\gamma\quad(\alpha,\beta,\gamma=1,\cdots,A\ ;\ k,l,m=1,\cdots,K)\tag{9-6-3}$$

を満たす**)．$\phi^k{}_\alpha$の k のうちでの最大値 K は一般に α に関係し K_αとすべきであるが簡単のため K としておく．

ゲージ変換の生成子を G として，上の3式を考慮して

$$G=\varepsilon^\alpha{}_k\phi^k{}_\alpha\tag{9-6-4}$$

とおく．G は次の2式から定められる．

---

*)　本節では添字の数が多く現われるため，これまでの $\phi_\alpha{}^\mu$ の代わりに $\phi^k{}_\alpha$ と μ の代わりに k を用いる．

**)　場の理論では $C^{kl\gamma}_{\alpha\beta,m}$ は $C^{kl\gamma}_{\alpha\beta,\ m}(x, x', x'')$ のように時空座標 x, x', x'' にもよる．

$$\frac{\partial G}{\partial t}+\{G, H\}=0 \quad \mathrm{mod}\,({\phi^1}_\alpha) \tag{9-6-5}$$

$$\{G, {\phi^1}_\alpha\}=0 \quad \mathrm{mod}\,({\phi^1}_\beta) \tag{9-6-6}$$

ここで定めた G は，ゲージ関数と呼ばれる A 個の無限小任意関数 $\varepsilon^\alpha(t)$ $(\alpha=1, \cdots, A)$ を含む．${\varepsilon^\alpha}_k$ との関係は後に示される．

ゲージ関数 $\varepsilon^\alpha_{(1)}(t)$，$\varepsilon^\alpha_{(2)}(t)$ で表示されたゲージ変換の生成子 $G(\varepsilon_{(1)})$, $G(\varepsilon_{(2)})$ を考える．第 3 の生成子

$$G(\varepsilon_{(3)})=\{G(\varepsilon_{(1)}), G(\varepsilon_{(2)})\} \tag{9-6-7}$$

は Jacobi 恒等式により (9-6-5)，(9-6-6) を満たす．すべての ${\phi^k}_\alpha$ は包合的な関係にあるので

$$G(\varepsilon_{(3)})=\varepsilon^\alpha_{(3)k}{\phi^k}_\alpha \tag{9-6-8}$$

と表わされよう．ゲージ群の特性は (9-6-7) で決定されるので，ゲージ群の型は ${\varepsilon^\alpha}_{(3)}$ の関数形

$$\varepsilon^\alpha_{(3)}=g^\alpha(\varepsilon^\beta_{(1)}, \varepsilon^\beta_{(2)}, C^\gamma_{\beta k}, {C^{kl\delta}_{\beta\gamma,}}_m) \tag{9-6-9}$$

によって分類されるであろう．

したがって，${\varepsilon^\alpha}_k$，$C^\beta_{\alpha k}$，$C^{kl\gamma}_{\alpha\beta,m}$ の間の関係式を求めることから始めよう．(9-6-4) を (9-6-5) に代入し，(9-6-1)，(9-6-2) の助けで次式を得る．

$$\dot{\varepsilon}^\alpha{}_k+{\varepsilon^\alpha}_{k-1}+C^\alpha_{\beta k}{\varepsilon^\beta}_k=0 \quad (2\leq k\leq K) \tag{9-6-10}$$

ここで

$$\dot{\varepsilon}^\alpha{}_k\equiv\frac{\partial {\varepsilon^\alpha}_k}{\partial t}+\{{\varepsilon^\alpha}_k, H\} \tag{9-6-11}$$

${\varepsilon^\alpha}_K$ は任意関数なので q，p も含むことができるが，以下簡単のため，${\varepsilon^\alpha}_K=\varepsilon^\alpha(t)$ として進める．反復法によって (9-6-10) より

$${\varepsilon^\alpha}_{K-1}=-\dot{\varepsilon}^\alpha-C^\alpha_{\beta K}\varepsilon^\beta \quad , \qquad {\varepsilon^\alpha}_{K-2}=\ddot{\varepsilon}^\alpha+C^\alpha_{\beta K}\dot{\varepsilon}^\beta+(\dot{C}^\alpha_{\beta K}-C^\alpha_{\beta K-1})\varepsilon^\beta$$

$$\begin{aligned}{\varepsilon^\alpha}_{K-l}=(-1)^l\Bigg[&\overset{(l)}{\varepsilon}{}^\alpha+C^\alpha_{\beta K}\overset{(l-1)}{\varepsilon}{}^\beta+\left\{\binom{l-1}{1}\dot{C}^\alpha_{\beta K}-C^\alpha_{\beta K-1}\right\}\overset{(l-2)}{\varepsilon}{}^\beta\\&+\left\{\binom{l-1}{2}\ddot{C}^\alpha_{\beta K}-\binom{l-2}{1}\dot{C}^\alpha_{\beta K-1}+C^\alpha_{\beta K-2}\right\}\overset{(l-3)}{\varepsilon}{}^\beta+\left\{\binom{l-1}{3}\overset{(3)}{C}{}^\alpha_{\beta K}\right.\\&\left.-\binom{l-2}{2}\ddot{C}^\alpha_{\beta K-1}+\binom{l-3}{1}\dot{C}^\alpha_{\beta K-2}-C^\alpha_{\beta K-3}\right\}\overset{(l-4)}{\varepsilon}{}^\beta+\cdots\\&+\left\{\overset{(l-1)}{C}{}^\alpha_{\beta K}-\overset{(l-2)}{C}{}^\alpha_{\beta K-1}+\cdots+(-1)^{l-2}\dot{C}^\alpha_{\beta K-l+2}+(-1)^{l-1}C^\alpha_{\beta K-l+1}\right\}\varepsilon^\beta\Bigg]\end{aligned} \tag{9-6-12}$$

ここで $\overset{(l)}{\varepsilon}{}^\alpha{}_k$，$\overset{(l)}{C}{}^\alpha_{\beta k}$ は (9-6-11) および

$$\dot{C}^{\alpha}_{\beta k} \equiv \frac{\partial C^{\alpha}_{\beta k}}{\partial t} + \{C^{\alpha}_{\beta k}, H\} \tag{9-6-13}$$

を反復することによって定義される．

$\phi^{k}{}_{\alpha}$，$\phi^{l}{}_{\beta}$，H に対する Jacobi 恒等式において (9-6-1)，(9-6-2) を用いると

$$\begin{aligned} &C^{kl\delta}_{\alpha\beta,\ m-1} + C^{kl\gamma}_{\alpha\beta,\ K} C^{\delta}_{\gamma m} - C^{k+1l\delta}_{\alpha\beta,\ m} + C^{l+1k\delta}_{\beta\alpha,\ m} - \delta^{k}{}_{K}(C^{\gamma}_{\alpha n} C^{nl\delta}_{\gamma\beta,\ m} + \{C^{\delta}_{\alpha m}, \phi^{l}{}_{\beta}\}) \\ &+ \delta^{l}{}_{K}(C^{\gamma}_{\beta n} C^{nk\delta}_{\gamma\alpha,\ m} + \{C^{\delta}_{\beta m}, \phi^{k}{}_{\alpha}\}) - \{H, C^{kl\delta}_{\alpha\beta,\ m}\} = D^{kl\delta\varepsilon}_{\alpha\beta,\ mn} \phi^{n}{}_{\varepsilon} \end{aligned} \tag{9-6-14}$$

ここで右辺の D は

$$D^{kl\delta\varepsilon}_{\alpha\beta,\ mn} = -D^{kl\varepsilon\delta}_{\alpha\beta,\ nm} \tag{9-6-15}$$

を満たす未定関数である．

次に $\phi^{k}{}_{\alpha}$，$\phi^{l}{}_{\beta}$，$\phi^{m}{}_{\gamma}$ の Jacobi 恒等式から

$$C^{kl\delta}_{\alpha\beta,\ n} C^{nm\varepsilon}_{\delta\gamma,\ s} + \{C^{kl\varepsilon}_{\alpha\beta,\ \delta},\ \phi^{m}{}_{\gamma}\} + (\textstyle{\substack{k,\ l,\ m\\ \alpha,\ \beta,\ \gamma}} \text{についての巡回和}) = D^{klm\varepsilon\delta}_{\alpha\beta\gamma,\ sn} \phi^{n}{}_{\delta} \tag{9-6-16}$$

が導かれる．

一方，(9-6-6) から

$$\varepsilon^{\beta}{}_{k} C^{1k\gamma}_{\alpha\beta,\ l} + \{\phi^{1}{}_{\alpha}, \varepsilon^{\gamma}{}_{l}\} = E^{1\gamma\delta}_{\alpha,\ lm} \phi^{m}{}_{\delta} \quad (l \geq 2) \tag{9-6-17}$$

ただし

$$E^{1\gamma\delta}_{\alpha,\ lm} = -E^{1\delta\gamma}_{\alpha,\ ml} \tag{9-6-18}$$

(9-6-14)，(9-6-16)，(9-6-17) の式を用いて $C^{kl\gamma}_{\alpha\beta,\ m}$，$C^{\beta}_{\alpha k}$ を定めよう．特別な模型を除いて，$\varepsilon^{\alpha}{}_{k}$，$C^{\beta}_{\alpha k}$，$C^{kl\gamma}_{\alpha\beta,\ m}$ は $\phi^{k}{}_{\alpha}$ を含まないことが多い．したがって我々はここで (9-6-14)，(9-6-16)，(9-6-17) の右辺に現れた $D^{kl\delta\varepsilon}_{\alpha\beta,\ mn}$，$E^{1\delta\gamma}_{\alpha,\ ml}$ に対して次の仮定をおく

$$D^{kl\delta\varepsilon}_{\alpha\beta,\ mn} = 0, \quad E^{1\gamma\delta}_{\alpha,\ ml} = 0 \tag{9-6-19}$$

任意関数 $\varepsilon^{\alpha}{}_{K}$ に対しても*)

$$\varepsilon^{\alpha}{}_{K} = \varepsilon^{\alpha}(t) \tag{9-6-20}$$

とおく．

(9-6-17) で $l = K$ とおいた式より，

$$\varepsilon^{\beta}{}_{k} C^{1k\gamma}_{\alpha\beta,\ K} = 0 \quad (K \geq 2) \tag{9-6-21}$$

(9-6-17) は $l \geq 2$ で成立するので上式も $K \geq 2$ で成り立つ．(9-6-12) を (9-6-21) に代入すると

$$\varepsilon^{\beta} C^{1K\gamma}_{\alpha\beta,\ K} - (\dot{\varepsilon}^{\beta} + C^{\beta}_{\delta K} \varepsilon^{\delta}) C^{1K-1\gamma}_{\alpha\beta,\ K} + (\ddot{\varepsilon}^{\beta} + \dot{\varepsilon}^{\delta} C^{\beta}_{\delta K} + \cdots) C^{1K-2\gamma}_{\alpha\beta,\ K} \quad \cdots$$

---

*) §9-1 で指摘したように，(9-6-5)，(9-6-6) の解が q, p 依存で，(9-6-20) の $\varepsilon^{\alpha}(t)$ で満たされない場合は，$\phi^{k}{}_{\alpha}$ を (9-2-39) のように定義し直し，$\Phi^{k}{}_{\alpha}$ を用いればよい．

$$+(-1)^{K-1}(\overset{(K-1)}{\varepsilon}{}^{\beta}+\overset{(K-2)}{\varepsilon}{}^{\delta}C^{\beta}_{\delta K}+\cdots)C^{11\gamma}_{\alpha\beta,K}=0 \tag{9-6-22}$$

$\varepsilon^{\alpha}(t)$ は任意なので $\overset{(k)}{\varepsilon}{}^{\alpha}(t)$ はすべて独立と考えられる．$\overset{(K-1)}{\varepsilon}{}^{\beta}$ は(9-6-22)の最後の項にのみ現れるので

$$C^{11\gamma}_{\alpha\beta,K}=0$$

このようにして順次

$$C^{1k\gamma}_{\alpha\beta,K}=0 \qquad (K\geq k>1,\ K\geq 2) \tag{9-6-23}$$

を得る．

次に，(9-6-17)において $l=K-1$ とおき，(9-6-12)の第 1 式を用いると

$$\varepsilon^{\beta}{}_{k}C^{1k\gamma}_{\alpha\beta,K-1}-\{\phi^{1}{}_{\alpha},C^{\gamma}_{\beta k}\}\varepsilon^{\beta}=0.\ (K\geq 3) \tag{9-6-24}$$

また(9-6-12)の各式を上式に代入すると，$K\geq 3$に対して

$$C^{1k\gamma}_{\alpha\beta,K-1}=0\ (k\leq K-1) \tag{9-6-25}$$

$$C^{1K\gamma}_{\alpha\beta,K-1}-\{\phi^{1}{}_{\alpha},C^{\gamma}_{\beta K}\}=0 \tag{9-6-26}$$

同様な関係式が $l=K-2,\ K-3,\ \cdots$ とおくことによって得られる．まとめると

$$C^{1k\gamma}_{\alpha\beta,l}=0 \quad (k\leq l,\ l\geq 2) \tag{9-6-27}$$

$$C^{1\,K-m+1\,\gamma}_{\alpha\beta,K-m}-\{\phi^{1}{}_{\alpha},C^{\gamma}_{\beta K}\}=0 \qquad (m=1,\ 2,\ \cdots K-2;\quad K\geq 3) \tag{9-6-28}$$

$$C^{1K-m+1\gamma}_{\alpha\beta,K-m-1}-C^{\delta}_{\beta K}C^{1K-m\gamma}_{\alpha\delta,K-m-1}+\{\phi^{1}{}_{\alpha},m\,\dot{C}^{\gamma}_{\beta K}-C^{\gamma}_{\beta K-1}\}=0 \tag{9-6-29}$$

$$(m=1,\ 2,\ \cdots,\ K-3;\quad K\geq 4)$$

これらの関係式や(9-6-14)を用いて $C^{kl\gamma}_{\alpha\beta,K}$ について多くの情報が得られるが詳しいことは論文〔10〕を参照されたい*⁾．これらのうち本節の議論に主要な役割を果たすもののみをあげておく．

$$C^{kl\gamma}_{\alpha\beta,K}=0\ (k\ \text{または}\ l<K) \tag{9-6-30}$$

したがって $C^{kl\gamma}_{\alpha\beta,K}$ の中で 0 とならないものは $C^{KK\gamma}_{\alpha\beta,K}$ のみである．(9-6-30)式で得られた結果はゲージ群の構造は $C^{KK\gamma}_{\alpha\beta,K}$ によってほとんど決定されることを示している．

$K=2$ の場合の主要な関係式を追加しておく．

$$C^{11\gamma}_{\alpha\beta,1}=C^{1k\gamma}_{\alpha\beta,2}=0 \qquad (k=1,\ 2) \tag{9-6-31}$$

$$2C^{12\gamma}_{\beta\alpha,1}=2C^{12\gamma}_{\beta\alpha,1}=\{\phi^{1}{}_{\alpha},C^{\gamma}_{\beta 2}\}+\{\phi^{1}{}_{\beta},C^{\gamma}_{\alpha 2}\} \tag{9-6-32}$$

$$2C^{22\gamma}_{\alpha\beta,1}=C^{\delta}_{\alpha 2}C^{12\gamma}_{\beta\delta,1}-C^{\delta}_{\beta 2}C^{12\gamma}_{\alpha\delta,1}-\{\phi^{1}{}_{\alpha},C^{\gamma}_{\beta 1}\}+\{\phi^{1}{}_{\beta},C^{\gamma}_{\alpha 1}\} \tag{9-6-33}$$

---

*）論文〔10〕では $K\leq 4$ の範囲で示されているが，$K\geq 5$ にも拡張証明できることがわかった．

$$2C^{22\gamma}_{\alpha\beta,\,2}=-\{\phi^1{}_\alpha,\,C^\gamma_{\beta 2}\}+\{\phi^1{}_\beta,\,C^\gamma_{\alpha 2}\}$$
$$=2C^{12\gamma}_{\alpha\beta,\,1}-2\{\phi^1{}_\alpha,\,C^\gamma_{\beta 2}\} \tag{9-6-34}$$

$K=3$ の場合，有効と思われる関係式として

$$C^{12\gamma}_{\alpha\beta,\,k}=C^{12\gamma}_{\beta\alpha,\,k}\ \ (k=1,\ 2),\ \ C^{12\gamma}_{\alpha\beta,\,1}=-C^{31\gamma}_{\alpha\beta,\,2} \tag{9-6-35}$$
$$C^{33\gamma}_{\alpha\beta,\,3}=C^{23\gamma}_{\alpha\beta,\,2}-\{\phi^2{}_\alpha,\,C^\gamma_{\beta 3}\}$$
$$=-\frac{1}{2}C^{22\gamma}_{\alpha\beta,\,1}-\frac{1}{2}\{\phi^2{}_\alpha,\,C^\gamma_{\beta 3}\}+\frac{1}{2}\{\phi^2{}_\beta,\,C^\gamma_{\alpha 3}\} \tag{9-6-36}$$

以上の準備をもとに，ゲージ群の代数的構造とその分類という本題に入ろう．すでに述べたように(9-6-7)で定義された $G(\varepsilon_{(3)})$ は(9-6-5)，(9-6-6)を満たすので，$\varepsilon^\alpha{}_{(3)k}$ は $\varepsilon^\alpha{}_{(3)K}$ で表され，$G(\varepsilon_{(3)})$ は $\varepsilon^\alpha{}_{(3)K}$ で定められるであろう．

$$G(\varepsilon_{(3)})=\varepsilon^\alpha{}_{(3)k}\phi^k{}_\alpha=\{\varepsilon^\alpha{}_{(1)k}\phi^k{}_\alpha,\,\varepsilon^\beta{}_{(2)l}\phi^l{}_\beta\}$$
$$=\varepsilon^\alpha{}_{(1)k}\,\varepsilon^\beta{}_{(2)l}\,C^{kl\gamma}_{\alpha\beta,\,m}\phi^m{}_\gamma+\varepsilon^\alpha{}_{(1)k}\{\phi^k{}_\alpha,\,\varepsilon^\beta{}_{(2)l}\}\phi^l{}_\beta+\varepsilon^\beta{}_{(2)l}\{\varepsilon^\alpha{}_{(1)k},\,\phi^l{}_\beta\}\phi^k{}_\alpha$$
$$+\{\varepsilon^\alpha{}_{(1)k},\,\varepsilon^\beta{}_{(2)l}\}\phi^k{}_\alpha\phi^l{}_\beta \tag{9-6-37}$$

すべての $\phi^k{}_\alpha$ は独立なので，$\varepsilon^\alpha{}_{(3)K}$ は(9-6-37)の両辺の $\phi^K{}_\alpha$ の係数を比べることによって決定される．ここで $\varepsilon^\alpha{}_{(1)K}$，$\varepsilon^\alpha{}_{(2)K}$ は t のみの関数とし，$\{\varepsilon^\alpha{}_k,\,\phi^l{}_\beta\}$，$\{\varepsilon^\alpha{}_{(1)k},\,\varepsilon^\beta{}_{(2)l}\}$ は $\phi^K{}_\gamma$ を含まないと仮定する．これらの仮定は特殊な模型を除いて容認されるであろうことが(9-6-12)から推察される．この仮定のもとで次式を得る．

$$\varepsilon^\gamma{}_{(3)K}=\varepsilon^\alpha{}_{(1)k}\varepsilon^\beta{}_{(2)l}C^{kl\gamma}_{\alpha\beta,\,K} \tag{9-6-38}$$

ここで(9-6-30)を用いると

$$\varepsilon^\gamma{}_{(3)K}=\varepsilon^\alpha{}_{(1)}\varepsilon^\beta{}_{(2)}C^{KK\gamma}_{\alpha\beta,\,K}\qquad(\varepsilon^\alpha{}_{(a)}=\varepsilon^\alpha{}_{(a)K}) \tag{9-6-39}$$

この式はゲージ変換の生成子を定める ε^α の決定には $C^{KK\gamma}_{\alpha\beta,\,K}$ のみが関与するという注目すべき結果である．換言すると，拘束条件の定常性を保証する一連のアルゴリズム(9-6-1)の最終段階に現れる $\phi^K{}_\alpha$ によってゲージ群の代数的構造が定められる．ここで留意すべきは，これらの簡潔な結果を得られたのは，$\phi^k{}_\alpha$ が拘束系列(9-6-1)の強等式によって定義されたからである．H_T と弱等式を用いて $\phi^k{}_\alpha$ を定義したのではこうはならない．

以上の点に注目するとゲージ群は次の2つの性質　(i) $C^{KK\gamma}_{\alpha\beta,\,K}$　(ii)拘束条件の段階の数 K によって定められると結論できる．以下それぞれによる分類を行なう．

（i）　$C^{KK\gamma}_{\alpha\beta,\,K}$ による分類

(1)　$C^{KK\gamma}_{\alpha\beta,\,K}=0$

この場合には $\varepsilon^\alpha{}_{(3)}=0$，すなわち $G(\varepsilon_{(3)})=0$ で，ゲージ群はアーベル群である．よって1個のゲージ自由度($\alpha=\beta=1$)の場合，アーベル群である．したがっ

て，すべてのゲージ自由度が完全に分離できるときはこの場合である．

(2)　すべての $C^{KK\gamma}_{\alpha\beta,K}$＝定数≠0

(9-6-31)から，$\varepsilon^{\alpha}_{(3)}$ も t のみの関数で $G(\varepsilon_{(3)})$ も $G(\varepsilon_{(a)})$ $(a=1,2)$ と同じ形である．よって $G(\varepsilon)$ は P.b. に関して閉じている．Yang-Mills 場がこの型である．

(3)　$C^{KK\gamma}_{\alpha\beta,K}$ が q，p あるいはどちらかを含む場合

$\varepsilon^{\alpha}_{(a)}$ $(a=1,\ 2)$ が t のみの関数であっても $\varepsilon^{\alpha}_{(3)}$ は q，p あるいはどちらかを含む．$G(\varepsilon)$ は Lie 群の生成子にはなりえないで，$G(\varepsilon)$ は P.b. に関して閉じない．$G(\varepsilon_{(3)})$ は $G(\varepsilon_{(a)})$ $(a=1,\ 2)$ とは異なった形になる．この場合にはもっと立入った考察が必要である．空間次元の数が ≥2 の相対論的膜の理論がこの場合の例である．

(ii)　拘束条件の段階の数 K による分類

(1)　$K=1$ の場合

上にあげた色いろな関係式は $K\geq 2$ の場合に成立するので，この方法からは特別な結論は求められない．

(2)　$K=2$ の場合

通常のゲージ場(電磁場，Yang-Mills 場，重力場など)がこの型である．(9-6-34)より，

$$\{\phi^1{}_\alpha, C^\gamma_{\beta 2}\} - \{\phi^1{}_\beta, C^\gamma_{\alpha 2}\} = 0 \tag{9-6-40}$$

ならば

$$C^{22\gamma}_{\alpha\beta,\ 2} = 0 \tag{9-6-41}$$

よってゲージ群はアーベル群である．さらに，もし

$$C^\beta_{\alpha 1} = C^\beta_{\alpha 2} = \text{定数} \tag{9-6-42}$$

であるなら，(9-3-1)により，すべての

$$C^{kl\gamma}_{\alpha\beta,\ m} = 0 \tag{9-6-43}$$

という結論が得られる．

Yang-Mills 場の場合は(9-6-40)は満たされず $C^\beta_{\alpha 2} = f_{\alpha\beta\gamma}A^\gamma{}_0$で，$\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$ を除いて，

$$C^{22\gamma}_{\alpha\beta,\ 2} = f_{\alpha\beta\gamma} \quad (\text{群の構造定数}) \tag{9-6-44}$$

これ以外は

$$C^{kl\gamma}_{\alpha\beta,\ m} = 0$$

他方(9-6-31)～(9-6-34)から，次の可能性が推察される．

$$C^{12\gamma}_{\alpha\beta,1} \neq 0 \quad \text{または} \quad C^{22\gamma}_{\alpha\beta,1} \neq 0. \tag{9-6-45}$$

これは Yang-Mills 場とは異なる型の非可換ゲージ場の存在の可能性を示唆している．$C^{22\gamma}_{\alpha\beta,2}=0$ のアーベル群の場合でも (9-6-45) の可能性は除去できない．

(3)　$K=3$ の場合

(9-6-36) から，$C^{\beta}_{\alpha 3}=$ 定数であっても $C^{33\gamma}_{\alpha\beta,3}\neq 0$ で非可換ゲージ場である．これが $K=2$ ((9-6-41) により 0) の場合との対照的な違いである．

付録　高階微分を含む拘束系の力学

最近，弦理論や重力理論において高階微分を含む拘束系の理論が色いろと試みられている．ここでは点粒子に対する問題に限って述べる．

§ A-1　高階微分を含む Lagrange 関数系の正準形式

高階微分を含む力学系は約 150 年余り以前に Ostrogradski により試みられている〔1〕．もちろんそこでは正則な力学系に限られていた．本節では N 個の自由度と n 階の微分を含む，次の Lagrange 関数から出発する．

$$L(q^i,\ \dot{q}^i,\ \cdots,\ \overset{(n)}{q}{}^i) \tag{A-1-1}$$

ただし $i=1\sim N$ で

$$\overset{(s)}{q}{}^i=\frac{d^s}{dt^s}q^i\equiv D^s q^i \quad (s=1,\cdots,n)$$

ここで拡張された Hessian 行列

$$A_{ij}=\partial^2 L/\partial\overset{(n)}{q}{}^i\partial\overset{(n)}{q}{}^j \tag{A-1-2}$$

を導入し，まず A_{ij} が正則な場合について正準形式の定式化を示す．次にその方法を基に A_{ij} が特異な Lagrange 関数系に進むことにする．

作用積分の変分*)

$$\delta I=\int_{t_1}^{t_2}\sum_{s=0}^{n}\frac{\partial L}{\partial\overset{(s)}{q}{}^i}\delta\overset{(s)}{q}{}^i dt \tag{A-1-3}$$

から運動方程式を導くために $\delta\overset{(s)}{q}{}^i=D^s\delta q^i$ の時間微分を部分積分により $\partial L/\partial\overset{(s)}{q}{}^i$ に移行させると

$$\delta I=\left[\left\{\sum_{s=1}^{n}(-1)^{s-1}D^{s-1}\frac{\partial L}{\partial\overset{(s)}{q}{}^i}\right\}\delta q^i+\left\{\sum_{s=2}^{n}(-1)^{s-2}D^{s-2}\frac{\partial L}{\partial\overset{(s)}{q}{}^i}\right\}\delta\dot{q}^i+\cdots+\frac{\partial L}{\partial\overset{(n)}{q}{}^i}\delta\overset{(n-1)}{q}{}^i\right]_{t_1}^{t_2}$$

---

*)　上付き，下付きの i についての和は従来通りにする

$$+\int_{t_1}^{t_2}\sum_{s=0}^{n}(-1)^s D^s\left(\frac{\partial L}{\partial \overset{(s)}{q}{}^i}\right)\delta q^i dt \tag{A-1-4}$$

となる．

拡張された Lagrange 方程式は境界 t_1，t_2 での変分をすべて

$$\delta \overset{(s)}{q}{}^i(t_1)=\delta \overset{(s)}{q}{}^i(t_2)=0 \tag{A-1-5}$$

とおいて，I の停留条件から得られる：

$$\frac{\delta L}{\delta q^i}\equiv\sum_{s=0}^{n}(-1)^s D^s\left(\frac{\partial L}{\partial \overset{(s)}{q}{}^i}\right)=0 \tag{A-1-6}$$ *)

よって運動方程式は一般に $2n$ 階の微分方程式となる．

通常の $n=1$ の場合には，(A-1-4) において境界 t_1，t_2 における δq^i の係数 $\partial L/\partial\dot{q}^i$ を p_i とおいて正準変数 q^i，p_i を導入する．高階微分の場合もこれに従って，(A-1-4)の〔　〕の中の $\delta\overset{(s)}{q}{}^i$ の係数を $p_i^{(s)}$ と定義し

$$\left.\begin{aligned} q^i_{(s)}&\equiv \overset{(s)}{q}{}^i \quad (s=0,\cdots,n-1)\\ p_i^{(s)}&\equiv\sum_{r=s+1}^{n}(-1)^{r-s-1}D^{r-s-1}\left(\frac{\partial L}{\partial \overset{(r)}{q}{}^i}\right)\equiv\frac{\delta L}{\delta \overset{(s+1)}{q}{}^i}\end{aligned}\right\} \tag{A-1-7}$$

の n 対を正準変数に選ぶのがよい．$p_i^{(s)}$ はその定義から明らかなように，次の漸化式で逐次求めることができる

$$p_i^{(n-1)}=\partial L/\partial \overset{(n)}{q}{}_i=\partial L/\partial\dot{q}^i_{(n-1)} \tag{A-1-8}$$

$$p_i^{(s-1)}=\partial L/\partial \overset{(s)}{q}{}^i-\dot{p}_i^{(s)}\equiv\delta L/\delta \overset{(s)}{q}{}_i \tag{A-1-9}$$

この $q^i_{(s)}$，$p_i^{(s)}$ を用いると (A-1-4) は

$$\delta I=\left[\sum_{s=0}^{n-1}p_i^{(s)}\delta q^i_{(s)}\right]_{t_1}^{t_2}+\int\left(-\dot{p}_i^{(0)}+\frac{\partial L}{\partial q^i}\right)\delta q^i dt \tag{A-1-10}$$

と表わされ，運動方程式は

$$\dot{p}_i^{(0)}-\frac{\partial L}{\partial q^i}=0 \tag{A-1-11}$$

となる．(A-1-9) に $p_i^{(s)}$ が現われるが，これらの式は $p_i^{(s)}$ の定義式であって，本当の意味での運動方程式でないことに注意しよう．(A-1-7) または，(A-1-8)，(A-1-9) を Ostrogradski 変換という．

---

*) $\delta L/\delta q^i$ は変分導関数とも呼ばれている．

このOstrogradski変換により，速度位相空間は位相空間に移される

$$(q^i,\ \dot{q}^i,\ \ddot{q}^i,\ \cdots,\ \overset{(2n-1)}{q}{}^i)\to(q^i_{(0)},\ q^i_{(1)},\ \cdots,\ q^i_{(n-1)}\ ;\ ,\ p_i^{(0)},\ p_i^{(1)},\ \cdots,\ p_i^{(n-1)})$$

以後これら $q^i_{(s)}$，$p_i^{(s)}$ を独立変数として扱う．この正準変数に対応するHamilton関数は

$$\begin{aligned} H&=\sum_{s=0}^{n-1}p_i^{(s)}\dot{q}^i_{(s)}-L(q_{(0)},\ q_{(1)},\ \cdots,\ q_{(n-1)},\ \dot{q}_{(n-1)})\\ &=\sum_{s=0}^{n-1}p_i^{(s)}q^i_{(s+1)}-L(q_{(0)},\ q_{(1)},\ \cdots,\ q_{(n)}) \end{aligned}\tag{A-1-12}$$

とすべきである．この式の微分をとると

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{n-1}\left(\frac{\partial H}{\partial q^i_{(s)}}dq^i_{(s)}+\frac{\partial H}{\partial p_i^{(s)}}dp_i^{(s)}\right)&=\sum_{s=0}^{n-1}(p_i^{(s)}dq^i_{(s+1)}+q^i_{(s+1)}dp_i^{(s)})-\sum_{s=0}^{n}\frac{\partial L}{\partial q^i{}_{(s)}}dq^i{}_{(s)}\\ &=\sum_{s=0}^{n-1}\dot{q}^i_{(s)}dp_i^{(s)}+\sum_{s=0}^{n-1}\left(p_i^{(s)}dq^i_{(s+1)}-\frac{\partial L}{\partial q^i_{(s)}}dq^i_{(s)}\right)-\frac{\partial L}{\partial q^i_{(n)}}dq^i{}_{(n)} \end{aligned}\tag{A-1-13}$$

となる．この両辺の $dq^i{}_{(s)}$ と $dp^{(s)}{}_i$ の係数を比較することにより

$$\dot{q}^i{}_{(s)}=\frac{\partial H}{\partial p_i^{(s)}}\ ;\quad p_i^{(s-1)}-\frac{\partial L}{\partial q^i{}_{(s)}}=\frac{\partial H}{\partial q^i{}_{(s)}}\quad(s=0,\cdots,n-1)\tag{A-1-14}$$

および

$$p_i^{(n-1)}=\frac{\partial L}{\partial q^i{}_{(n)}}\tag{A-1-15}$$

(A-1-15)は $p_i^{(n-1)}$ の定義(A-1-8)そのものである．また(A-1-14)の第2式の左辺は(A-1-9)により $-\dot{p}_i^{(s)}$ に等しい．よって正準運動方程式

$$\dot{q}^i{}_{(s)}=\frac{\partial H}{\partial p_i^{(s)}}\ ;\quad \dot{p}_i^{(s)}=-\frac{\partial H}{\partial q^i_{(s)}}\tag{A-1-16}$$

を得る．これによって，正準変数を(A-1-7)で定義したことの妥当性が示されたわけである．この正準方程式から拡張されたLagrange方程式(A-1-6)，それと同等の(A-1-11)を得ることは容易である．なんとなれば(A-1-14)の第2式から，$p_i^{(-1)}=0$ を考慮し

$$\frac{\partial H}{\partial q^i_{(0)}}=-\frac{\partial L}{\partial q^i_{(0)}}$$

を得るので(A-1-16)で $s=0$ とした式は(A-1-11)を与えるからである．

これで，高階微分を含む正則Lagrangian系での正準形式が得られたので，次に特異系に移ろう．

§ A-2 特異 Lagrange 関数系の正準形式

拡張された Hessian 行列(A-1-2)の A_{ij} が特異な場合，すなわち det $(A_{ij})=0$ で

$$\mathrm{rank}\ (A_{ij})=N-r$$

とする．〔2〕,〔3〕

よって，$p_i^{(n-1)}$ の定義式(A-1-8)はすべての $q^i_{(n)}$ について解けないで，次の r 個の1次拘束条件を得る

$$\phi_\alpha{}^1(q_{(0)},\ q_{(1)},\ \cdots,\ q_{(n-1)},\ p^{(n-1)})=0 \quad (\alpha=1,\cdots,r) \tag{A-2-1}$$

この $\phi^1{}_\alpha$ が $p_i^{(n-1)}$ のみに依存し，$p_i^{(s)}\,(s<n-1)$ には依存しないことは後に示す．全 Hamiltonian H_T は第8章で述べたように，正準 Hamilton 関数 H_0 と次の関係にある．

$$H_T=H_0+v^\alpha\phi_\alpha{}^1 \tag{A-2-2}$$

ここで v^α は未定乗数である．(A-1-12)から H_T および H_0 を定めよう．det A_{ij} の階数は $N-r$ なので，一般性を失うことなく $N-r$ 個の

$$p_a^{(n-1)}=\frac{\partial L}{\partial \overset{(n)}{q}{}^a} \quad (a=1,\cdots,N-r) \tag{A-2-3}$$

が $\dot{q}^a{}_{(n-1)}$ について解けると仮定できる．(det $A_{ab}\neq0$ とできる)．その解を

$$\dot{q}^a_{(n-1)}=\overset{(n)}{q}{}^a=f^a(q^i_{(0)},\ q^i_{(1)},\ \cdots,\ q^i_{(n-1)},\ p_b^{(n-1)},\ \dot{q}^\alpha{}_{(n-1)}) \tag{A-2-4}$$

$$(b=1,\cdots,N-r\ ;\ \alpha=(N-r+1),\cdots,N)$$

とする．この式を(A-1-12)に代入すると

$$H=p_a^{(n-1)}f^a+p_\alpha^{(n-1)}\dot{q}^\alpha_{(n-1)}+\sum_{s=0}^{n-2}p_i^{(s)}q^i_{(s+1)}-L\Big|_{\dot{q}^a_{(n-1)}=f^a} \tag{A-2-5}$$

となる．ここで$(\partial L/\partial\dot{q}^\alpha_{(n-1)})\Big|_{\dot{q}^a_{(n-1)}=f^a}$ が $\dot{q}^\alpha_{(n-1)}$ に依存しないことを§9-4と同様な方法で示す．(A-2-3)，(A-2-4)から得られる恒等式

$$p_a^{(n-1)}=\frac{\partial L}{\partial \overset{(n)}{q}{}^a}\Big|_{\overset{(n)}{q}{}^a=f^a} \quad (a=1,\cdots,N-r)$$

を $\overset{(n)}{q}{}^\alpha$ について微分すると

$$A_{ab}\frac{\partial f^b}{\partial \overset{(n)}{q}{}^\alpha}+A_{a\alpha}=0 \quad (\alpha=N-r+1,\ \cdots,\ N) \tag{A-2-6}$$

det $(A_{ab})\neq0$ で A_{ij} の階数が $N-r$ であることから，(9-4-22) を導いたと同様に

$$A_{\alpha i}=C^a_\alpha A_{ai} \tag{A-2-7}$$

を満たす $C^a{}_\alpha$ が存在する．したがって上記の２式を用いて

$$\frac{\partial}{\partial \overset{(n)}{q}{}^\beta}\left(\frac{\partial L}{\partial \overset{(n)}{q}{}^\alpha}\bigg|_{\overset{(n)}{q}{}^a=f^a}\right)=A_{\alpha a}\frac{\partial f^a}{\partial \overset{(n)}{q}{}^\beta}+A_{\alpha\beta}$$

$$=C^a{}_\alpha\left(A_{ab}\frac{\partial f^b}{\partial \overset{(n)}{q}{}^\beta}+A_{a\beta}\right)=0 \qquad \text{(A-2-8)}$$

が示される．よって＊)

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{q}^\alpha_{(n-1)}}=p_\alpha^{(n-1)}-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha_{(n-1)}}\bigg|_{\dot{q}^a_{(n-1)}=f^a} \qquad \text{(A-2-9)}$$

は $q^\alpha_{(n-1)}$ に依存しない．したがって H は $\dot{q}^\alpha_{(n-1)}$ の線形な関数で

$$H=H_0(q^i_{(0)},\ \cdots,\ q^i_{(n-1)},\ p_i^{(0)},\ \cdots,\ p_i^{(n-2)},\ p_a^{(n-1)})+\dot{q}^\alpha_{(n-1)}\phi_\alpha{}^1(q_{(0)},\ \cdots,\ q_{(n-1)},\ p^{(n-1)}) \qquad \text{(A-2-10)}$$

と書かれる．ここで

$$H_0=H|_{\dot{q}^\alpha_{(n-1)}=0} \qquad \text{(A-2-11)}$$

$$\phi_\alpha{}^1=p_\alpha^{(n-1)}-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha_{(n-1)}}\bigg|_{\dot{q}^a_{(n-1)}=f^a} \qquad \text{(A-2-12)}$$

H_0 は正準 Hamilton 関数で，$\phi_\alpha{}^1$ は $\dot{q}^\alpha{}_{(n-1)}$ に依存せず１次拘束条件式(A-2-1)になっている．Dirac の方法に現れる全 Hamilton 関数は未定乗数 v^α を用いて

$$H_T=H|_{\dot{q}^\alpha{}_{(n-1)}=v^\alpha}=H_0+v^\alpha\phi_\alpha{}^1 \qquad \text{(A-2-13)}$$

第８章の Dirac の方法にしたがって Hamilton の運動方程式は

$$\dot{q}^i_{(s)}=\partial H_T/\partial p_i^{(s)}\approx q^i_{(s+1)} \quad (s=0,\cdots,n-2) \qquad \text{(A-2-14 a)}$$

$$\dot{q}^a{}_{(n-1)}=\partial H_T/\partial p_a^{(n-1)}\approx f^a(q_{(0)},\ \cdots,\ q_{(n-1)},\ p_b^{(n-1)},\ v) \qquad \text{(A-2-14 b)}$$

$$\dot{q}^\alpha_{(n-1)}=\partial H_T/\partial p_\alpha^{(n-1)}\approx v^\alpha \qquad \text{(A-2-14 c)}$$

$$\dot{p}_i^{(0)}=-\partial H_T/\partial q^i{}_{(0)}\approx\partial L/\partial q^i{}_{(0)} \qquad \text{(A-2-14 d)}$$

$$\dot{p}_i^{(s)}=-\partial H_T/\partial q^i_{(s)}\approx -p_i^{(s-1)}+\partial L/\partial q^i_{(s)} \quad (s=1,\cdots,n-1) \qquad \text{(A-2-14 e)}$$

記号 ≈ は従前通り $\phi_\alpha{}^1\approx 0$ のもとで成立する．上式の右辺および(A-2-19)までの $\partial L/\partial q^i_{(s)}$ は次の略記である：

$$\frac{\partial L}{\partial q^i_{(s)}}\equiv\left\{\frac{\partial}{\partial q^i_{(s)}}L(q_{(0)},\ \cdots,\ q_{(N-1)},\ q_{(N)})\right\}\bigg|_{\dot{q}^a_{(N-1)}=f_a} \quad (s=0,\cdots,N) \qquad \text{(A-2-15)}$$

(A-2-14)の方程式の中で，(A-2-14d)のみが力学的方程式で，他の方程式と $\phi_\alpha{}^1\approx 0$ が(A-1-8)，(A-1-9)の Ostrogradski 変換を表している．この正準運動方程式か

＊)　(A-2-5)の H の右辺第１項も f^a を通して $\dot{q}^a{}_{(n-1)}$ に依存するが，H の右辺の最後の項からの寄与と相殺する．

ら，正則な Lagrangian の場合と同様に Lagrange 方程式 (A-1-6) が得られる．Ostrogradski 変換 (A-1-9) の中で $q^{(n+k)}$ $(k\geq 0)$ を含まぬものがあれば，それらは拘束条件式と考えられる．例えば $p_a^{(n-2)}$ は $\det(A_{ab})\neq 0$ から $\overset{(n+1)}{q}{}^a$ を含む．しかし，ある α に対して

$$p_\alpha^{(n-2)}=\frac{\partial L}{\partial q_{(n-1)}^\alpha}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{(n-1)}^\alpha}\right) \tag{A-2-16}$$

が $\overset{(n+k)}{q}{}^\alpha$ $(k\geq 0)$ を含まなければ，拘束条件とみなされるものとする．しかしこれは 1 次拘束条件式の定常性から導かれる 2 次拘束条件のはずである．実際にこのことを示そう．

$$\dot{\phi}_\alpha{}^1=\{\phi_\alpha{}^1, H_T\}\simeq\{\phi_\alpha{}^1, H_0\}+v^\beta\{\phi_\alpha{}^1, \phi_\beta{}^1\} \tag{A-2-17}$$

ここで

$$\{f,\ g\}=\sum_{s=0}^{n-1}\left(\frac{\partial f}{\partial q_{(s)}^i}\frac{\partial g}{\partial p_i^{(s)}}-\frac{\partial f}{\partial p_i^{(s)}}\frac{\partial g}{\partial q_{(s)}^i}\right)$$

基本 P.b. として

$$\{q_{(s)}^i,\ p^{(s')}{}_j\}=\delta^i{}_j\delta^{s'}{}_s\ ;\ \{q_{(s)}^i, q_{(s')}^j\}=\{p_i^{(s)}, p_j^{(s')}\}=0 \tag{A-2-18}$$

$$(i,j=1,\cdots,N\ ;\ s,\ s'=0,\cdots,n-1)$$

とする．一般に $\{\phi_\alpha{}^1,\ \phi_\beta{}^1\}\neq 0$ なら (A-2-17) は v^β を定める式になる．ここでは $\{\phi_\alpha{}^1,\ \phi_\beta{}^1\}=0$ であるので，(A-2-12) の $\phi_\alpha{}^1$ の定常条件は (A-2-14e) により

$$\phi_\alpha{}^2\equiv\dot{\phi}_\alpha{}^1\approx-p_\alpha^{(n-2)}+\frac{\partial L}{\partial q_{(n-1)}^\alpha}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{(n-1)}^\alpha}\right)\approx 0 \tag{A-2-19}$$

は (A-2-16) にほかならない．以下 3 次拘束についても同様である．したがって，Ostrogradski 変換に含まれる拘束条件式は H_T を用いる Dirac のアルゴリズムによって 1 次拘束条件から求まる．詳しくは文献〔3〕参照

例 A-1

上に述べた一般論に対し，次の模型では例外があると Hebda が指摘した〔4〕

$$L=\frac{1}{2}\left(\overset{(3)}{q}{}^1\right)^2+\ddot{q}^1\ddot{q}^2$$

この L から導かれる正準運動量は

$$p_1^{(2)}=\overset{(3)}{q}{}^1,\ p_1^{(1)}=\ddot{q}^2-\overset{(4)}{q}{}^1,\ p_1^{(0)}=-\overset{(3)}{q}{}^2+\overset{(5)}{q}{}^1,\ p_2^{(2)}=0,$$
$$p_2^{(1)}=\ddot{q}^1,\ p_2^{(0)}=-\overset{(3)}{q}{}^1 \tag{A-2-20}$$

この式から拘束条件式

$$p_1^{(2)}+p_2^{(0)}=0 \tag{A-2-21}$$

を得る．この式はOstrogradski変換(A-2-20)を組み合わしたものであり，変換そのものではない．これがHebdaの指摘である．しかし，それが2次拘束条件から求まることを以下で示す．

A_{ij}のランクは1なので1次拘束条件式は

$$\phi^1 = p_2^{(2)} \approx 0$$

H_Tは

$$H_T = \frac{1}{2}(p_1^{(2)})^2 + (p_2^{(1)} - q^1_{(2)})q^2_{(2)} + p_1^{(1)}q^1_{(2)} + p_1^{(0)}q^1_{(1)} + p_2^{(0)}q^2_{(1)} + vp_2^{(2)}$$

ϕ^1の定常条件は

$$\phi^2 = \dot{\phi}^1 = -p_2^{(1)} + q^1_{(2)} \approx 0$$

$$\phi^3 = \dot{\phi}^2 = p_2^{(0)} + p_1^{(2)} \approx 0$$

$$\phi^4 = \dot{\phi}^3 = -p_1^{(1)} + q^2{}_{(2)} \approx 0$$

$$\dot{\phi}^4 = p_1^{(0)} + v \approx 0$$

この第2式の$\phi^3 \approx 0$が(A-2-21)に他ならない．

§ A-3　Lagrangianに全時間微分を加えた時の拘束条件の数

一般相対論ではスカラーLagrangianから2階微分を含む項を落として出発する．ここでは逆に，正則なLagrangian関数に全時間微分項を加えた場合の拘束条件について考える．作用積分は変わらないので，境界条件を正確にとればLagrange方程式は不変である．

Lagrangianとして

$$L = L_0(q,\ \dot{q},\ \cdots,\ \overset{(m)}{q}) + \frac{d}{dt}F(q,\ \dot{q},\ \cdots,\ \overset{(n-1)}{q}) \quad (m \leq n-1) \tag{A-3-1}$$

簡単のためL_0のHessian行列

$$A^0_{ij} = \partial^2 L_0 / \partial \overset{(m)}{q}{}^0 \partial \overset{(m)}{q}{}^0 \tag{A-3-2}$$

は正則とする．$q^i{}_{(s)}$に対する正準運動量は(A-1-8)，(A-1-9)を用いて

$$p_i^{(s)} = \partial F / \partial \overset{(s)}{q}{}^i \quad (m \leq s \leq n-1) \tag{A-3-3 a}$$

$$p_i^{(m-r)} = \frac{\partial F}{\partial \overset{(m-r)}{q}{}^i} + \sum_{a=0}^{r-1}(-1)^a \frac{d^a}{dt^a}\left(\frac{\partial L_0}{\partial q^i_{(m-r+a+1)}}\right) \quad (1 \leq r \leq m) \tag{A-3-3 b}$$

ここで$n > 2m$，$n \leq 2m$の2つの場合に分けて考える．

(i)　$n \leq 2m$

(A-3-3)の関係式は$2N(n-m)$個の次の拘束条件式を与える

$$\phi_i^u \equiv p_i^{(n-u)} - \frac{\partial F}{\partial q^i_{(n-u)}} - \sum_{a=0}^{m-n+u-1}(-1)^a \frac{d^a}{dt^a}\left(\frac{\partial L_0}{\partial q^i_{(n-u+a+1)}}\right) = 0 \quad (1 \leq u \leq 2n-2m) \tag{A-3-4}$$

§ A-2 で述べたように $\phi_i^u\,(u\geq 2)$ は 1 次拘束条件式 ϕ_i^1 の定常条件からも導かれる.

$$\det\{\phi_i^u,\ \phi_j^v\}=(-1)^{n-m}(\det\ A^0)^{2(n-m)}\neq 0 \qquad \text{(A-3-5)}$$

であるから，ϕ_i^u は第 2 類拘束条件である．第 8 章で述べた Dirac 括弧を用いると，$\phi_i^u=0$ と強い意味でおけて，独立な自由度の数は $2Nm$ となり，L_0 のそれと等しくなる.

(ii)　$n>2m$

Ostrogradski 変換に含まれる拘束条件は

$$\phi_i^u=(-1)^{u-1}\left(p_i^{(n-u)}-\frac{\partial F}{\partial q^i_{(n-u)}}-\sum_{a=0}^{n-m-u}(-1)^a\frac{\partial L_0}{\partial q^i_{(n-u-a+1)}}\right)=0$$

$$(1\leq u\leq n) \qquad \text{(A-3-6)}$$

この拘束条件の定常性から $N(n-2m)$ 個の拘束条件が現れる

$$\phi_i^u=\sum_{a=0}^{m}(-1)^{n+a-1}\frac{d^{u-n+a-1}}{dt^{u-n+a-1}}\frac{\partial L_0}{\partial \overset{(a)}{q}{}^i}=0 \quad (n+1\leq u\leq 2n-2m) \qquad \text{(A-3-7)}$$

ここで，これら $2N(n-m)$ 個の拘束条件は第 2 類拘束条件 $(\det\{\phi^u,\phi^v\}\neq 0)$ であり $\det\{\phi^1,\phi^{2n-2m}\}\neq 0$ より $\phi^{2n-2m}=0$ の定常条件から v^i が定まる．$n\leq 2m$ の場合と同様，独立な自由度の数は L_0 の正準変数の数 $2Nm$ となる

例 A-2

$n>2m$ の模型として

$$L=\frac{\dot{q}^2}{2}+\overset{(3)}{q}$$

をとる．1 次拘束条件 $\quad \phi^1=p^{(2)}-1\approx 0$

の定常条件として $\quad \phi^2=\dot{\phi}^1=-p^{(1)}\approx 0$

$$\phi^3=\dot{\phi}^2=p^{(0)}-q_{(1)}\approx 0$$

$$\phi^4=\dot{\phi}^3=-q_{(2)}\approx 0$$

の $2(3-1)=4$ 個の第 2 類拘束条件を得る．よって，正準変数は $3\times 2=6$ 個であるが，独立変数は 2 となり，$\overset{(3)}{q}$ のない場合と一致する.

§ A-4　ゲージ変換について

再び § A-2 の Lagrangian に帰る．簡単のため，拘束条件はすべて第 1 類とする．作用積分が不変であるようなゲージ変換が存在し，速度位相空間と位相空間での変換が整合的であることが § 9-1 と同様に論じられる.

ゲージ変換の生成子は次の連立方程式から定められる

$$\frac{\partial G}{\partial t}+\{G, H_T\}=0 \quad \mathrm{mod}\,(\phi^1) \tag{A-4-1a}$$

$$\{G, \phi_\alpha{}^1\}=0 \quad \mathrm{mod}\,(\phi^1) \tag{A-4-1b}$$

速度位相空間でのゲージ変換は

$$\delta q^i_{(0)}\equiv\{q^i_{(0)}, G\}=\frac{\partial G}{\partial p_i^{(0)}} \tag{A-4-2a}$$

$$\delta q^i_{(s)}\equiv\frac{d^s}{dt^s}\,\delta q^i_{(0)} \tag{A-4-2b}$$

で定義される．まず，上の変換で作用積分が不変であることを示す．

$$\delta L=\sum_{s=0}^{n-1}\frac{\partial L}{\partial q^i_{(s)}}\delta q^i_{(s)}=\left(\frac{\partial L}{\partial q^i_{(0)}}-\dot{p}_i^{(0)}\right)\delta q^i_{(0)}+\frac{d}{dt}\left(\sum_{s=0}^{n-1}p_i^{(s)}\delta q^i_{(s)}\right) \tag{A-4-3}$$

(A-4-1 a) は (A-2-14 d) (これは力学方程式) 以外の (A-2-14) の Hamilton 運動方程式を用いて

$$\frac{\partial G}{\partial t}+\sum_{s=0}^{n-1}\left[\frac{\partial G}{\partial q^i_{(s)}}q^i_{(s+1)}+\frac{\partial G}{\partial p_i^{(s)}}\left(-p_i^{(s-1)}+\frac{\partial L}{\partial q^i_{(s)}}\right)\right]=0 \tag{A-4-4}$$

と書ける．ただし $p^{(-1)}=0$．(A-4-3) の右辺で $\delta q^i_{(0)}=\partial G/\partial p_i^{(0)}$ および (A-4-4) を用いると

$$\delta L=\frac{d}{dt}\left(-G+\sum_{s=0}^{n-1}p_i^{(s)}\delta q^i_{(s)}\right) \tag{A-4-5}$$

となり，(A-4-2) のゲージ変換は作用積分を不変に保つことが示された．

位相空間でのゲージ変換は次式で与えられる．

$$\delta_* q^i_{(s)}\equiv\{q^i_{(s)}, G\},\quad \delta_* p_i^{(s)}\equiv\{p_i^{(s)}, G\} \tag{A-4-6}$$

これらと (A-4-2) の $\delta q^i_{(s)}$，$\delta p_i^{(s)}=\delta(\partial L/\partial q^i_{(s+1)}-\dot{p}_i^{(s+1)})$ との間の関係式の詳しい導出は文献〔2〕に譲り，結果のみを示す．

$$\frac{d}{dt}\{q^i_{(s)}, G\}=\{q^i_{(s+1)}, G\}-\frac{\partial^2 G}{\partial p_i^{(0)}\partial p_j^{(s)}}\left(\frac{\partial L}{\partial q^j{}_{(0)}}-\dot{p}_j^{(0)}\right) \quad \mathrm{mod}\,(\phi^1) \tag{A-4-7}$$

したがって力学方程式のもとでのみ

$$\delta q^i_{(s)}=\frac{d^s}{dt^s}\delta q^i_{(0)}\simeq\delta_* q^i_{(s)} \tag{A-4-8}$$

である．

$\delta p_i^{(s)}$ についても，力学方程式と (A-4-8) を用いると

$$\delta p_i^{(s)}\simeq\delta_* p_i^{(s)}-\frac{d}{dt}\left(\delta p_i^{(s+1)}-\delta_* p_i^{(s+1)}\right) \tag{A-4-9}$$

$s=n-1$ から出発し，逐次，運動方程式のもとで

$$\delta p_i^{(s)}\simeq\delta_* p_i^{(s)} \tag{A-4-10}$$

を得る．したがって $\delta q^i_{(s)}$，$\delta p_i^{(s)}$ に対して不変であった作用関数は変換 $\delta_* q^i_{(s)}$，$\delta_* p_i^{(s)}$ に対しても，運動方程式(A-2-14)のもとで不変である．

参　考　文　献

●微分形式を用いて書かれた解析力学の書の代表的なものとして，

V. I. Arnold：古典力学の数学的方法(ロシア語からの，安藤・蟹江・丹羽訳，岩波書店，1981)

R. Abraham and J. E. Marsden：Foundation of Mechanics (Benjamin, 1978)

E. Cartan：Leçons sur les Invariant Integraux (Paris, 1922)「外微分形式の理論——積分不変式——」(矢野健太郎訳，白水社，1964)

●拘束系の理論については，

P. A. M. Dirac：Lectures on Quantum Mechanics (Belfer Graduate School of Science, Yeshiba University, New York, 1964)

K. Sundermeyer：Constrained Dynamics (Lecture Notes in Physics, 169, Springer-Verlag, 1982) [この書には微分形式による記述も一部とり入れられている.]

S. Sudarshan and N. Mukunda：Classical Dynamics：A Modern Perspective (John Wiley and Sons, 1973)

A. J. Hanson, T. Regge and C. Teitelboim：Constrained Hamiltonian Systems (Accad. Nazionale dei Lincei, Rome, 1976) [これは雑誌の中にあるが，一応まとまったものである.]

次の書にも拘束系の理論が書かれている.

大貫義郎：解析力学(岩波書店，1987)

なお，微分形式についての書として，

H. Flanders：Differential Forms with Applications to the Physical Sciences (Academic Press, 1963)(岩堀長慶訳：微分形式の理論，岩波書店，1967)

松田道彦：外微分形式の理論(岩波書店，1975)

大島利雄・小松彦三郎：1階偏微分方程式(岩波基礎数学講座，1階偏微分方程式，岩波書店，1976)

松島与三：多様体入門(裳華房，1967)

動座標系の方法へ応用したものとして，

栗田　稔：微分形式とその応用（現代数学社，1976）

がある．

第 1 章の文献

［1］ 前掲の松田「外微分形式の理論」および大島・小松「1階偏微分方程式」を参照．

第 4 章の文献

［1］ И. М. ГЕЛЬФАНД, С. В. ФОМИН：ВАРИА ЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ,（МОСКВА 1961）.「変分法」（関根智明訳，文一綜合出版）

［2］ E. Cartan：Leçons sur les Invariant Integraux（Paris, 1922）.「外微分形式の理論——積分不変式——」（矢野健太郎訳，白水社，1964）

第 5 章の文献

［1］ R. Abraham and J. E. Marsden：Foundation of Mechanics （Benjamin, 1978）．第3章．

第 6 章の文献

［1］ E. Cartan：Leçons sur les Invariant Integraux（Paris, 1922）.「外微分形式の理論——積分不変式——」（矢野健太郎訳，白水社，1964）

［2］ G. Marmo and E. J. Saletan：Group Theoretical Methods in Physics, Proceedings of the 5th International Colloquium, ed. by R. T. Sharp and B. Kolman（1977）.

［3］ L. P. Eisenhart：Continuous Groups of Transformations（Dover Publication, INC New York, 1961），§69.

第 7 章の文献

［1］ H. Kamo and R. Sugano, Ann. of Phys. 128（1980），298.

第8章の文献

[1] P. A. M. Dirac, Can. J. Math. **2** (1950), 129. および前掲の Dirac の Lecture.

[2] T. Kimura, Prog. Theor. Phys. **27** (1962), 747.

[3] T. Maskawa and H. Nakajima, Prog. Theor. Phys. **56** (1976), 1295.

[4] R. Cawley, Phys. Rev. Lett. **42** (1979), 413.

[5] 前掲の Dirac の Lecture.

[6] R. Sugano and H. Kamo, Prog. Theor. Phys. **67** (1982), 1966 ; R. Sugano, Prog. Theor. Phys. **68** (1982), 1377.
L. Castellani, Ann. of Phys. **143** (1982).

[7] A. Frenkel, Phys. Rev. **D 21** (1980), 2986.

[8] M. E. V. Costa ; H. O. Girotti and T. J. Simões, Phys. Rev. **D 32** (1985), 405.

[9] T. Kimura and K. Senba, Nuov. Cim. **2** (1969), 752.

第9章の文献

[1] R. Sugano, Y. Saito and T. Kimura, Prog. Theor. Phys. **76** (1986), 283

[2] T. Kimura, I. Sogami and R. Sugano, "Constraint Theory and Quantization Method" ed. by F. Colomo, L. Lusanna and G. Marmo (World Scientific, 1993), p. 57

[3] R. Sugano and Y. Kagraoka and T. Kimura, Int. J. Mod. Phys. **A7** (1992), 61.

[4] R. Sugano and Y. Kagraoka, Z. Phys. **C 52** (1991), 437

[5] R. Sugano, Prog. Theor. Phys. **70** (1983), 36

[6] D. Dominici and J. Gomes, J. Math. Phys. **21** (1980), 2124

[7] R. Sugano and T. Kimura, Phys. Rev **D 41** (1990), 1247.

[8] R. Sugano and Y. Kagraoka, Z. Phys. **C 52** (1991), 443.

[9] R. Sugano, "Constraint Theory and Quantization Methods" ed. by F. Colomo, L. Lusanna and G. Marmo (World Scientific, 1993), p.275.

[10] R. Sugano and T. Kimura, J. Math. Phys **31** (1990), 2337.

[1] M. Ostrogradski, see E. T. Whittaker : Analytical Dynamics (Cambridge U. P. London, 1937), 4th ed. p.265

[2] Y. Saito, R. Sugano, T. Ohta and T. Kimura, J. Math. Phys. **30** (1989), 1122.

[3] Y. Saito, R. Sugano, T. Ohta and T. Kimura, J. Math. Phys. **34** (1993), 3775.

[4] P. W. Hebda, J. Math. Phys. **31** (1990), 2116.

索　　引

さ 行

た 行

な　行

は　行

ま　行

や　行

ら　行

著者略歴

木村　利栄（きむら　としえい）（理学博士）

1948年：京都大学理学部物理学科卒業
1948年：広島大学理論物理学研究所助手
　　　　以後，講師，助教授を経て
1973年：同　教授
1990年：広島大学名誉教授，広島県立大学教授（1994 年退職）
　　　　専門分野：重力理論，場の理論
　　　　主要著書：『古典および量子重力理論』（共著）
　　　　　　　　　　　　　　　　　（マグロウヒル出版）

菅野　礼司（すがの　れいじ）（理学博士）

1954年：京都大学理学部物理学科卒業
1959年：京都大学理学研究科博士課程卒業
1959～60年：湯川奨学生として基礎物理学研究所で研究
1960年：大阪市立大学理学部物理学教室助手
　　　　以後，講師，助教授を経て
1985年：同　教授
1994年：大阪市立大学名誉数授
　　　　専門分野：素粒子論，科学論
　　　　主要著書：『物理学の論理と方法（上，下）』（大月書店）
　　　　　　　　　『相対性理論はむずかしくない』
　　　　　　　　　　　　　　　（講談社ブルーバックス）
　　　　　　　　　『微分形式による特殊相対論』（丸善）
　　　　　　　　　『東の科学・西の科学』（東方出版）
　　　　　　　　　『力とは何か』（丸善）

微分形式による解析力学　　　　1996 ©

1988 年 9 月 30 日　初版第 1 刷発行
1996 年12月 15 日　改訂増補第 1 刷発行

著　者　木　村　利　栄
　　　　菅　野　礼　司
発行者　吉　岡　　　誠

〒606 京都市左京区田中門前町87
発行所 株式会社 吉　岡　書　店
電話（075）781-4747/振替　01030-8-4624

（企）昭和堂印刷　印刷・清水製本

ISBN4-8427-0261-3

「物理学叢書」刊行に際して

二十世紀の物理学の進歩は，物質の極微の構造の暴露に，物質の精妙な機構の解明に，驚異的な発展，飛躍をもたらした．その結果，新しい自然力の解放，支配を実現化したばかりでなく，新しい物質の創造，生命の謎への挑戦をも企画せしめつつある．更に，既知の自然力の未曾有の強力な駆使さえ可能にしつつある．二十世紀後半に至って，原子力に，あるいはオートメーションに今や第二の産業革命を喚起せんとするに至った原動力は，物理学の開拓的な創造性によることは言をまたない．更に，現在の物理学は，かつての相対論，量子論の出現にも比すべき革命の前夜にあるといわれているこの時に当たり，物理学の新領域の単なる解説，あるいは時局的な技術書ではなく，真にわが国物理学の発展の糧となるべき良書の出版は緊急の必要事といわねばならぬ．ここに「物理学叢書」を編んで世に送る所以である．

この叢書に収められる原著は，いずれもそれぞれの分野の世界的権威者による定評ある名著に限られるが，前述の精神に鑑みその性格，スタイルに特徴あるものを選ぶと共に，その本質において創造的価値高きものを目標とした．

この叢書が，物理学またはその関連分野へ進む学徒に，よき伴侶として用いられ，真にその血肉となり得ることがわれわれの念願であり，更にこの叢書によって伝えられる海外の学風が，広くわが国の教育，研究へのよき刺戟となり，わが国の明日の科学を築く基礎に貢献するところがあれば幸いである．

(1954年12月)

物　理　学　叢　書

編集・小谷正雄／小林　稔／井上　健／山本常信／高木修二

フェルミ　小林　稔他訳 **原子核物理学**	本書は著者の講義に補正を加えられたものであり，実験・理論両方面にわたって原子核の基礎知識の全ぼうが要領よくまとめられている．内容の新鮮さ力強さに著者の個性が表われている．
シッフ　井上　健訳 **新版 量子力学** 上下 上 368頁　下 320頁	刊行以来無比の標準的教科書として絶賛を博してきた本書は，原著第3版刊行にともない全面的に版を改めた．基本的な概念やその数学的形式を丁寧に解説されている量子力学の入門書である．
ゴールドスタイン　瀬川富士他訳 **新版 古典力学** 上下 上 528頁　下416頁	最近，物性物理や素粒子物理を学ぶ人の間に，古典力学はきちんと学ぶべきだという気持が強い．本書は，場の理論から，多体系の物理学を研究する上で，基本的な入門書であり，古典力学を新しい見地から解説．
リープマン，ロシュコ　玉田　珖訳 **気体力学**	高速流体力学の基礎をできるだけ物理的に記述し，流体運動と流体の物性との結びつきの理解へと読者を導き，反応性気流や稀薄気体の流れなど最近の問題にも適応するすぐれた教科書である．
フレーリッヒ　永宮健夫・中井祥夫訳 **誘電体論**	誘電率の意味を熱力学的，統計力学的にとらえ，個々の分子の双極子能率と誘電率より固体，気体，溶液などの誘電的性質を統一的観点から記述され，本質を簡潔，かつ完璧にまとめられている．

キャレン　山本常信・小田垣孝訳
熱力学 上・下
上 248頁　下 216頁

この教科書は従来の歴史的発展に沿った記述を取らず，いくつかの公理に基づいて熱力学を再構築し，論理構造を明確にした．今後の熱力学の発展と飛躍のためにこのような安定化のもつ意義は深い．

ハーケン　松原武生・村尾　剛訳
固体の場の量子論 上・下
——素励起物理学入門——　上 168頁　下 232頁

教養程度の知識のみで，短期間に系統的に場の量子論の方法と固体論への応用を完全に習得できる．上巻では多くの演習問題で理解を早め，下巻では現在の考え方・モデル・方法などが整然と解説されている．

アシュクロフト，マーミン　松原武生・町田一成訳
固体物理の基礎
（全4巻）上・I 304頁　下・I 288頁
上・II 272頁　下・II 280頁

学部生にも大学院生にも使えるよう工夫され，内容の取捨選択がしやすく，種々の目的，異なる水準でもうまく使い分けられる．固体物理学の現象の記述と理論的解析による統一という著者の目標は完全に達成されている．

ド・ジャン　久保亮五監修・高野・中西訳
高分子の物理学
——スケーリングを中心にして——　360頁

全く刷新された最近の高分子物理学の成果を，ド・ジャン自らが平明なスケーリング則の解説と共にまとめた労作である．むつかしい理論に立入らず，スケーリング則とその実験的検証を理解させるという立場を貫いている．

アンダーソン　松原武生訳
凝縮系物理学の基本概念

凝縮系物理学への深い洞察と透徹した哲学を世に問うた啓蒙書．単なる知識を伝える通常の教科書ではなく，学生にはこれから何を学ぶべきかの指針を，研究者には自己のいる現在点を認識させるまれにみる優れた指導書．

ディラック　喜多秀次訳
ヒルベルト空間のスピノル
120頁

有限 n 次元空間のスピノル理論をみごとな方法で展開した後 $n\to\infty$ を行う．多体フェルミ粒子系・場の量子論・粒子物理学に直接適用可能な形式である．無限次元に固有な事態の生起の指適とその物理的関連の論議を含む．

シュッツ　家・二間瀬・観山訳
物理学における幾何学的方法
328頁

本書は近年理論物理学において，極めて基礎的でかつ有効な数学的手法である微分幾何についての教科書である概念を中心に分かり易く解説してあり，物理学への応用も示してある．

スタウファー　小田垣　孝訳
浸透理論の基礎
200頁

浸透理論は不規則系の中に作られるクラスターの性質を対象とした極めて汎用性の高い理論であり，本書はその最良の入門書である．スケーリング則や繰り込み群が駆使され，フラクタルや計算機実験にも触れられている．

メンスキー　菅野公男訳
径路の幾何学と素粒子論
504頁

径路の概念を用いて場の量子論の問題をはば広く論じることにより「径路」の概念が場の量子論にとって必要であるだけでなく自然でもあることを強調する．本訳書はソヴィエトで出版されるはずの改訂版に基づいている．

J.J.Sakurai　桜井明夫訳
現代の量子力学 上・下
上 392頁　下 320頁

素粒子物理学の独創的理論家であった著者が，ＵＣＬＡでの多年の講義に基づき書き遺した現代的教科書．非相対論的量子力学の核心が，最近の理論・実験の発展に則し，新しい視点から明快かつ具体的に記述されている．